ACERVO
BOLETIM DO CENTRO DE DOCUMENTAÇÃO DO GHEMAT-SP

A FUNÇÃO DERIVADA EM LIVROS DIDÁTICOS PARA O ENSINO SECUNDÁRIO

The derivative function in textbooks for secondary education

Circe Mary Silva da Silva[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4828-8029

Submetido: 15 de junho de 2023 **Aprovado:** 01 de setembro de 2023

RESUMO

O objetivo da presente pesquisa foi responder à pergunta: como o conceito de derivada foi abordado pelos autores Thales Carvalho; Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto; Algacyr Maeder; Manoel Bezerra e Ary Quintella nos livros de matemática escritos especialmente para o ensino colegial, no período de 1940 a 1970, no Brasil? David Tall formulou a teoria dos três mundos da matemática. Tomamos como referência a teoria deste autor. Escolhemos três categorias para análise dos dados: 1) abordagem formal simbólica; 2) abordagem formal, mesclada com corpóreo-simbólica e 3) abordagem corpóreo simbólico. Quase todos os autores seguiram uma abordagem formalizada, sendo que a única apresentação diferente foi aquela do autor Carvalho, que enquadra-se numa abordagem formal mesclada com corpóreo-simbólica.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial; História dos livros didáticos; Ensino

ABSTRACT

The objective of this research was to answer the question: how the concept of derivative was approached by the authors Thales Carvalho; Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha and Cesar Dacorso Neto; Algacyr Maeder; Manoel Bezerra and Ary Quintella in mathematics books written especially for high school education, from 1940 to 1970, in Brazil? David Tall formulated the theory of the three worlds of mathematics. We take as reference the theory of this author. We chose three categories for data analysis: 1) symbolic formal approach; 2) formal approach, mixed with corporeal-symbolic and 3) symbolic corporeal approach. The results of the research showed that the textbooks almost all authors followed a formalized approach, and the only different presentation was that of the author Carvalho, who fits into a formal approach mixed with corporeal-symbolic.

Keywords: Differential Calculus; History of textbooks; Teaching

MOTIVAÇÃO E CONTEXTO

Nossos ancestrais, que foram nômades e viviam da caça e da coleta, precisavam se movimentar. O movimento como função vital habitou o mundo desde sempre. Galileu Galilei (1564-1642), contrariando seus contemporâneos, afirmava que a Terra se movimentava e, ainda, que girava; Isaac Newton (1643-1727) estudava a queda dos corpos, a velocidade e a aceleração; René Descartes (1596-1650) entendia o corpo humano como composto de matéria física, a qual se movimentava de acordo com as leis da física e da mecânica. Centenas de

[1] Doutora em Pedagogia (Universidade de Bielefeld). Professora voluntária do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas. Rua Gomes Carneiro n. 1, Centro, Pelotas (RS) Brasil, cep: 96010-610.

estudiosos queriam entender o movimento e, se possível, achar uma linguagem matemática para descrevê-lo. Muitos esforços foram feitos para compreender a variabilidade dos fenômenos de corpos que se deslocam no céu e na terra e, desvendar, assim, os mistérios que desafiavam a mente humana. Matemáticos do século XVII, notadamente Newton e Leibniz (1646-1716), alcançaram êxito e trouxeram para as gerações futuras as sementes germinadas daquilo que conhecemos atualmente como Cálculo Diferencial e Integral. Newton usou para a função derivada o termo fluxão, mas foi Leibniz que empregou o termo "derivada". Santo Agostinho (354-430) a usou no sentido de originar-se – "Muito embora o homem também seja imagem e também semelhança em sentido derivado, por isso, encontra-se mais próximo de Deus, em comparação às criaturas..." (VAHL, 2016, p. 115). Um dos significados da palavra derivada é "originada"; então, pode-se dizer que a função derivada origina-se de uma outra função.

Essa ideia genial de trazer para a matemática o movimento e expressá-lo por meio de expressões algébricas, tornou possível interpretar matematicamente fenômenos físicos como a velocidade de um míssil, o crescimento de um tumor, a intensidade do tremor de um terremoto, e inclusive, o fino vibrar de uma corda de violino. Segundo Anton Et Al (2014, p. 131): "O coroamento das realizações do Cálculo Diferencial é sua habilidade em capturar matematicamente o movimento contínuo, permitindo que seja analisado instante a instante".

Assim, algo tão vivo e dinâmico como o conceito de derivada não pode ser apresentado de maneira fria e seca aos estudantes. É preciso, mesmo que rapidamente, descrever as suas origens e explicar o seu potencial aplicativo. Tratar a derivada, no ensino, como um conceito vivo e atraente para os iniciantes, mesmo que, só depois de um longo estudo, ele consiga a perceber a potencialidade e beleza dessa ferramenta matemática, deve ser a meta de todo educador compromissado com a aprendizagem de seus estudantes.

Atualmente, no Brasil, o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é uma das disciplinas do ensino superior, obrigatória para variados cursos como matemática, engenharia, economia, etc. Houve, no século XIX, tentativas de introduzi-la, no currículo do ensino secundário brasileiro (LIMA, SILVA, VALENTE; 2022) tentativa essa que, de modo especial no início do século XX, foi feita em diferentes países (ZUCCHERI; ZUDINI, 2014). No Brasil, o ensino do CDI começou a ser ofertado nos cursos complementares do ensino secundário para aqueles alunos que seguiriam estudos de engenharia ou medicina. Entretanto, com a Reforma Campos, em 1931, ele passou a integrar o curso secundário. O secundário foi dividido em dois cursos seriados: fundamental e complementar, com 5 e 2 anos de duração, respectivamente (BRASIL, 1931). O curso complementar obrigatório para os candidatos a certos institutos de ensino superior, incluía para os candidatos aos cursos de engenharia ou arquitetura, o cálculo de derivadas.

Na década seguinte, a Lei Orgânica do Ensino Secundário (Reforma Capanema), de abril de 1942, dividiu o ensino secundário em dois ciclos: ginasial com 4 anos e colegial (clássico e científico) com a duração de 3 anos. Para o 3ª ano do ciclo colegial, na disciplina de matemática, na parte de álgebra estava previsto, o tópico funções, com as seguintes especificações: noção de função e de variável real, representação cartesiana, noção de limite e continuidade; derivadas definição, interpretação geométrica e cinemática, cálculo das derivadas, derivação das funções elementares, aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples (BRASIL, 1943, p. 4).

A partir da década de 1940, professores de matemática iniciaram a produção de livros didáticos de matemática destinados especialmente ao ciclo colegial, também chamado de ensino secundário e, atualmente, ensino médio. Nos prefácios, há indicações de que os livros seguiam os programas oficiais. Esses livros que incluíam o CDI foram editados até a década de 1970, em variadas edições, o que pode comprovar a ampla apropriação e circulação dessas obras no ensino secundarista.

Por poucas décadas, o ensino dos fundamentos do Cálculo Diferencial foi ensinado em escolas secundárias do Brasil. Embora nas duas décadas anteriores, o CDI tenha aparecido em livros destinados (LONGEN, 2007), ao curso complementar e em livros de álgebra (OLIVEIRA NETO, 2013), essas obras não serão analisadas aqui, pois estão fora do período objeto de estudo. Entretanto, desde a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases de 1961, que incumbiu ao Conselho Federal de Educação (CFE) a elaboração de novos programas para a disciplina de matemática, o CDI começou o declínio do conteúdo dos programas do ensino dos cursos secundários, pois o CFE, por não ter cumprido essa tarefa que lhe foi confiada, qual seja, elaborar os programas de matemática, cedeu espaço nos programas para os novos conteúdos da Matemática Moderna, os quais começaram a ser incluídos nos livros didáticos (SILVA; SCHUBRING, 2016). A ausência de programas específicos para o ensino secundário, como prescrição oficial do CFE, permitiu que outros conteúdos tomassem o lugar do CDI, que foi gradativamente abandonado. Embora a maioria das escolas tenha deixado de lado o CDI, algumas escolas modelo (anexas às universidades), escolas militares, escolas técnicas (Cefets) e algumas escolas particulares, mantiveram ainda o CDI por muitos anos em seus programas (SILVA; SCHUBRING, 2016).

Embora o CDI não seja mais objeto de ensino, na educação do Brasil, nos últimos anos vêm ocorrendo discussões sobre a conveniência de esse conteúdo voltar a fazer parte da base curricular da matemática no ensino médio do País. Isto se deve às posições manifestadas por parte de alguns matemáticos, como Ávila (1991) e às investigações de pesquisadores da Educação Matemática que defendem essa proposta, o que por si só bastaria para justificar a presente pesquisa que busca entender como o conceito de derivada foi abordado nos livros didáticos.

Os resultados parciais da investigação integram o projeto[2] coletivo intitulado "O Cálculo Diferencial e Integral: uma análise das tentativas de sua escolarização". Nesse sentido, organizamos o presente texto a fim de responder a seguinte pergunta: como o conceito de derivada foi abordado pelos autores: Thales de Faria Mello Carvalho; Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto; Algacyr Munhoz Maeder; Manoel Jairo Bezerra; Ary Quintella) nos livros de matemática escritos especialmente para o ensino colegial no período de 1940-1970, no Brasil?

CAMINHOS DA PESQUISA

Consideramos, assim como Choppin (2012), que os livros didáticos são fontes privilegiadas para entendermos a cultura escolar. A cultura escolar, não obstante ser uma construção complexa, pode ser entendida, como propõe Benito (2017, p. 119), como um "conjunto de práticas e discursos que regularam ou regulam a vida das instituições de educação formal e a profissão docente". Em nossa pesquisa, os livros didáticos, que fazem parte dessa cultura escolar, foram considerados instrumentos pedagógicos uma vez que propõem especificidades de métodos e técnicas de ensino em relação aos conteúdos que são objetos desta investigação. Começamos identificando um referencial básico para analisarmos os livros didáticos e, para tal, escolhemos dois autores: Felix Klein e David Tall. A razão dessa escolha será explicitada a seguir.

Ao escrever o livro *Matemática Elementar sob um ponto de vista superior*, em 1908, Felix Klein propunha uma nova abordagem para o ensino, procurando aproximar a matemática dita elementar, ensinada no secundário, daquela matemática do ensino superior (SILVA; RIOS, 2019). Propunha, ali, tomar o conceito de função como uma noção aglutinadora da matemática, em suas palavras: "discutir a noção de função, já que nosso movimento de reforma escolar defende dar ao importante conceito um lugar de destaque na instrução". Dizia, também, que a função "[...] não deveria ser introduzida por meio de definições abstratas, mas deveria ser introduzida como uma propriedade viva, por meio de exemplos elementares" (KLEIN, 1945,

---

[2] Pesquisa financiada pelo CNPq.

p. 200, 205). Especificamente sobre o CDI, assim ele se manifestava: “Nós desejamos que os conceitos que são expressos pelos símbolos y=f(x), $\frac{dy}{dx}$, $\int y dx$, tornem-se familiares para os alunos, sob essas designações; não, de fato, como uma nova disciplina abstrata, mas como uma parte orgânica de toda instrução e que ela avance lentamente, **começando com exemplos simples**” (KLEIN, 1945, p. 223, grifos nossos).

As ideias e preconizações de Felix Klein que foram difundidas, no Brasil, por Euclides Roxo, idealizador dos programas de matemática para o ensino colegial (secundário) na Reforma de Capanema, refletem o ideal desejado para o CDI nesta modalidade de ensino, conforme pretendia Klein (SILVA, 2023).

Educadores da matemática, em suas investigações, a partir do final do século XXI, têm contribuído para ampliar tais ideias e compreender como introduzir, no ensino, conceitos que pertencem ao pensamento matemático avançado. Os conceitos matemáticos avançados são “[...] aqueles que se focam essencialmente nas abstrações de definições e deduções e que têm por base os processos de representação e abstração” (DOMINGOS, 2003, p. 9, p. 53). Um exemplo de um conceito matemático avançado é aquele da derivada. Baseado em Vinner (2001), Domingos afirma que quando os alunos ingressam no estudo de conceitos mais avançados, é importante que a definição seja “introduzida como o último critério das várias tarefas matemáticas”.

A teoria de Tall, que traz a ideia dos três mundos, serviu como inspiração e base para escolhermos as categorias de abordagens apresentadas nas coleções escolhidas. A teoria do pesquisador David Tall (2013) contribui com a teoria de aprendizagem matemática, ao propor que o pensamento matemático pode ser visto sob três aspectos: 1) mundo corpóreo (embodied), que é aquele relacionado às características físicas dos objetos matemáticos, é um mundo de significado sensorial, 2) mundo simbólico, que é aquele relacionado às características dos objetos nas palavras tradicionais e familiares onde os cálculos podem ser feitos (ambos aritméticos e algébricos), e 3) mundo axiomático formal, que é aquele relacionado ao formalismo matemático dos conceitos.

Da matemática prática, formada por números, formas e espaço – o pensamento progride para uma matemática teórica – da álgebra e geometria euclidiana. “Enquanto a geometria se constrói através do aumento da sofisticação estrutural, o simbolismo se desenvolve através da compressão operacional das operações incorporadas ao simbolismo manipulável que então tem propriedades estruturais que desenvolvem suas próprias formas de definição e prova” (TALL, 2013, p. 402-403). Finalmente, o terceiro mundo da matemática formal axiomática constrói um nível formal baseado na definição teoria dos conjuntos e nas demonstrações formais.

Nos estágios posteriores da escolaridade (ensino secundário) ou no primeiro ano de faculdade (ensino superior), os estudantes de matemática são apresentados às ideias do cálculo. A abordagem tradicional é uma mistura de geometria, aritmética e álgebra, por exemplo, para encontrar a inclinação de uma função y= f(x), de x para x+h tal que para a nova função $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ precisa-se calcular o limite quando h fica pequeno. Tall explica o quão problemático foi para Newton e Leibniz essa quantidade tornar-se arbitrariamente pequena.

Para Tall (2002), uma abordagem corpórea do cálculo se concentra em ideias perceptivas fundamentais antes que seja introduzido qualquer tipo de simbolismo. No ensino, não começamos com as ideias formais de limites, mas com ideias corpóreas de representações gráficas de funções. Ele exemplifica: "[...] a inclinação de um gráfico tempo-distância é uma velocidade, e a inclinação de um gráfico tempo-velocidade é uma aceleração, então nos concentramos nos sentidos incorporados de distância, velocidade e aceleração, em vez da matemática subjacente mais simples que cada uma é obtida da anterior como a inclinação de seu gráfico" (TALL, 2002, p. 12).

A temática do CDI foi incorporada à disciplina Matemática para o colegial e várias coleções, constituídas por 3 livros (um para cada ano escolar), foram escritas para esse ciclo de ensino. Também surgiu um modelo de livro único para todos os anos do colegial, no Brasil. Como critério analítico, selecionamos os livros que contam com maior número de edições para analisar a abordagem do conceito de derivada feita por seus autores.

O Quadro 1 mostra os autores selecionados, o título das obras e as respectivas edições.

Quadro 1: Relação de autores, livros e edições

Autor/ Autores	Título	Edições
Thales de Faria Mello Carvalho	Matemática para os cursos clássico e científico – 3º ano	1ª 1943, 2ª em 1948; 6ª em 1956; livro único em 1969
Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto	Matemática 2º Ciclo – 3ª série	1ª em 194?[3]; 2ª em 1946; 3ª em 1951, 4ª em 1955; 5ª em 1956

[3] O ponto de interrogação, no Quadro 1, significa o desconhecimento do ano preciso da edição, uma vez que alguns livros não incluíram o ano em que foram editados.

Algacyr Munhoz Maeder	Curso de Matemática – 3º livro – ciclo colegial	1ª em 1944; 2ª em 1949; 3ª em 1953; 5ª em 1955; 7ª em 1959
Manoel Jairo Bezerra	Curso de Matemática para os primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico – livro único	1ª em 1953; livro único 24ª em 1969, 28ª em 1971; 32ª em 1975
Ary Quintella	Matemática – terceiro ano colegial	1ª em 195? 9ª em 1960; 16ª em 1968

Fonte: dados trabalhados pela autora

A partir do arrolamento dos livros apresentados no Quadro 1, realizamos uma revisão das pesquisas concluídas sobre esses livros didáticos. Nessa investigação, elencamos como principais estudos, tendo em vista a convergência com a temática aqui explorada, os seguintes trabalhos acadêmicos: Adilson Longen – *Livros didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da educação matemática*. Denise Franco Capello Ribeiro – *Um estudo da contribuição de livros didáticos de Matemática no processo de disciplinarização da matemática escolar do colégio -1943 a 1961*. Maryneusa Cordeiro Otone – *História da constituição da matemática do colégio no cotidiano escolar*. Carlos Augusto Santos Carvalho – *Aspectos relevantes para uma história da evolução do currículo de Matemática na segunda metade do século XX- o caso do Colégio de Aplicação da UFRJ*. Francisco de Oliveira Filho – *A Matemática do Colégio: livros didáticos e história de uma disciplina escolar*. Os pesquisadores acima referidos, abordaram em suas investigações, parcialmente ou na totalidade, os mesmos livros didáticos por nós selecionados. Forneceram indicações acerca do número de edições dos livros e das datas em que ocorreram, bem como referentes à utilização desses livros, conteúdos neles abordados e metodologia adotada. A investigação de Longen sobre a obra de Maeder, bastante aprofundada, serviu para a análise do conceito de derivada apresentada por esta autora. Entretanto, em nenhum deles, o conceito de derivada foi investigado de maneira comparativa. Nesse sentido, o nosso trabalho complementa e amplia os estudos anteriores.

Em 1911, na revista *L'Enseignement Mathématique*, Schülke (1911), escreveu um artigo sobre os conceitos de derivada e diferencial. Nele, criticava a abordagem desses conceitos no ensino secundário, mediante o argumento de que os professores adotavam, nesse nível de ensino, procedimentos de apresentação de tais conceitos similares aos adotados no ensino de nível superior. Ele indagava: "[...] podemos nos perguntar se essa forma de fazer as coisas está alinhada com o objetivo perseguido. Em primeiro lugar, a notação já apresenta dificuldades $\frac{dy}{dx}$, porque na expressão nem dy, nem dx, nem a barra de fração tem qualquer significado, mas apenas o símbolo inteiro”. Sua proposta, a fim de facilitar o ensino nesse nível da escolaridade, seria:

> Na minha coleção de exercícios encontrar-se-ão desenvolvimentos mais precisos. Em lugar de três noções diferentes $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{dy}{dx}, dy = f'(x)dx$ que os iniciantes têm muita dificuldade em distinguir um do outro, basta, para fins de ensino e de matemática aplicada, introduzir apenas as pequenas quantidades dx e dy (SCHULKE, 1911, p. 224-227).

Contemporaneamente, não estamos muito distantes da proposta de Schülke, uma vez que, para definir a derivada de uma função, não se usa mais $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e sim, apenas a o limite de uma função. Assim, nos livros de Cálculo para o ensino superior, pode-se simplificar as notações para não causar dificuldades excessivas aos estudantes. Por exemplo, no livro de Guidorizzi[4] (2008), a definição de derivada é a seguinte:

Figura 1: Definição de derivada

Definição: Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por f’(p). Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável ou diferenciável em p.

Fonte: Guidorizzi, p. 137

Metodologicamente, no presente estudo, o tratamento dos dados foi feito da seguinte maneira: buscou-se, inicialmente, em cada coleção, identificar os conteúdos referentes à derivação de funções e o espaço que os autores destinaram a este assunto no livro do 3º ano – uma vez que este era o ano previsto para o CDI, conforme o programa oficial – ou no livro único. Na sequência, procedeu-se à transformação do conteúdo em unidades. A interpretação desses dados foi orientada pelas categorias previamente definidas.

[4] Escolhemos esse autor porque é um dos livros didáticos mais indicados para a disciplina de Cálculo I nas universidades públicas de São Paulo, conforme pesquisa de Aléssio (2019).

UMA IDEIA GERAL DOS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

> "Quem não ficou maravilhado ao aprender que a função y= e^x, como uma fênix renascendo das cinzas, é sua própria derivada?" (François le Lionnais)

Considerando que derivada é o conceito central do Cálculo, em cada uma das coleções analisadas, percebemos que seus autores seguiram o programa oficial, não há diferença significativa nas unidades. Todos apresentaram as noções de derivada, interpretações e aplicações. O Quadro 2 resume os conteúdos que foram tratados nos respectivos livros, para o 3º ano colegial, revelando pequenas variações (alguns trouxeram interpretação geométrica para a diferencial, exemplos de funções sem derivadas, derivada infinita).

Quadro 2: Comparativo das temáticas em cada coleção

Bezerra	Carvalho	Maeder	Quintella	Roxo Et Al
Razão incremental; Derivada num ponto; Função derivada; Interpretação da derivada: geométrica e cinemática; Diferencial; Interpretação geométrica da diferencial; Regras de derivação; Aplicações: funções crescentes e decrescentes, máximos e mínimos	Razão incremental; Derivada num ponto; Exemplo; Função derivada; Função derivada de ordem; Interpretação da derivada: geométrica e cinemática; Derivadas unilaterais; Continuidade e derivabilidade; Regras de derivação; Máximos e mínimos	Acréscimo; Derivada num ponto; Função derivada; Derivada infinita; Interpretação da derivada: geométrica e cinemática; Diferença e diferencial; Interpretação geométrica da diferencial; Regras de derivação; Aplicação das derivadas	Incremento Derivada num ponto; Função derivada; Regra geral de derivação; Interpretação da derivada: geométrica e cinemática; Regras de derivação; Derivadas sucessivas; Diferencial; Interpretação geométrica da diferencial; Máximos e mínimos	Razão incremental; Derivada num ponto; Função derivada Função sem derivada; Derivada infinita; Interpretação da derivada: geométrica e cinemática; Diferencial; Derivação sucessiva; Regras de derivação; Diferenciais sucessivas; Aplicações da teoria das derivadas

Fonte: Dados trabalhados pela autora

Globalmente, os autores atenderam às recomendações do programa oficial da Reforma Capanema. Os autores preferiram iniciar por definições formais. A ênfase nas aplicações, as quais eram consideradas por Felix Klein essenciais porque davam significado aos conceitos, aparecem muito discretamente nos livros. "A necessidade urgente de tais reformas reside no fato de que elas se preocupam com aquelas noções matemáticas que governam completamente as **aplicações da matemática** que estão sendo feitas hoje em todos os campos possíveis [...]" (KLEIN, 1945, p. 223, grifos nossos).

ABORDAGEM DO CONCEITO DE DERIVADA NOS LIVROS ANALISADOS

Em estudo anterior (SILVA, 2023), analisamos a abordagem do conceito de limite feita por esses mesmos autores. Todos eles, mesmo que alguns tenham iniciado com uma abordagem intuitiva, chegaram a uma definição formal de limite, em termos de ε e δ, conforme a moderna formulação: "Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo **a**, exceto possivelmente no próprio **a**. O limite de f(x) quando x tende a **a** será L, escrito como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se 0<$|x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$" (LEITOHLD, 1990, p. 58). Após definir formalmente o conceito de limite da função, a derivada é definida apoiada no conceito de limite: diz-se que a derivada de uma função f é a função f', definida por $f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, desde que esse limite exista.

Entretanto, todos os autores analisados, ao abordarem a função derivada, começaram com o conceito de razão incremental e só depois apresentaram a definição de derivada em um ponto.

Há uma semelhança enorme na sequência seguida pelos autores: acréscimo, razão incremental, derivada em um ponto, função derivada. Além disso, primeiramente as definições foram apresentadas, seguindo-se as interpretações geométrica e cinemática (conforme o programa oficial).

A formulação de Bezerra (196?, p. 201) é significativa para mostrar a sequência que quase todos os autores seguiram, começando com a definição da derivada em um ponto.

> Seja uma função y= f(x) definida num intervalo (a,b) e x_0 um ponto de (a,b), Δx_0 é acréscimo da variável quando a variável sofre um acréscimo Δx_0, a função sofre um acréscimo $\Delta y_0 = f(x_0+\Delta x_0) - f(x_0)$. A relação $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0).}{\Delta x_0}$ chama-se razão dos acréscimos ou razão incremental. Chama-se derivada da função y=f(x) no ponto x_0 ao limite finito, caso exista, da razão incremental quando $\Delta x_0 \to 0$, $\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(x_0)$.

A partir daí, ele chega à definição de função derivada: uma função de x, definida em (a , b) tal que para cada x, o valor coincide com o valor da derivada de f(x) nesse ponto. Essa função é simbolizada por f'(x), y' ou $\frac{dy}{dx}$.

Há pequenas variações entre as formulações dos autores, por exemplo, Quintella e Carvalho exigem que a função, além de ser definida no intervalo, seja contínua, para que exista a derivada num ponto.

A abordagem de Carvalho (1969) p. 561) começa, também, formalmente, com uma função, a qual é definida e contínua em um intervalo; seguida da definição de derivada num ponto. Entretanto, antes de definir a função derivada, ele trouxe um exemplo, acompanhado de uma justificativa: “A fim de dar ao principiante uma ideia bem clara da noção de derivada, apresentamos o seguinte exemplo bastante elucidativo” (CARVALHO, 1969, p. 561).

O exemplo é a função quadrática $y = x^2$, contínua para todos os seus pontos de existência. Para $x_0 = 4$, ele atribui pequenos acréscimos Δx_0 e analisa o que acontece quando se atribui esse incremento a x e a y. Essa situação foi didaticamente exemplificada pelo autor numa tabela (Figura 2).

Figura 2: Tabela exemplificadora

x_0	y_0	Δx_0	$x_0 + \Delta x_0$	$y_0 + \Delta y_0$	Δy_0	$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$
4	16	0,1	4,1	16,81	0,81	8,1
		0,01	4,01	16,0801	0,0801	8,01
		0,001	4,001	16,008001	0,008001	8,001
		↓	......	....	↓	↓
		0			0	8

Fonte: Carvalho, 1969, p. 561

Carvalho (1969) concluiu dizendo que, mesmo que os acréscimos tendam para zero, simultaneamente, a razão incremental tende para 8, que é derivada no ponto $x_0 = 4$. Nota-se que, ao experimentar diferentes valores para Δx_0 , o esperado é que os acréscimos dados se comportem previsivelmente. Conforme Tall sugere esse é um tipo de pensamento do mundo corpóreo.

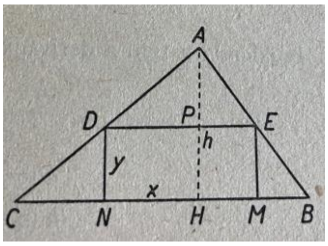
A este exemplo, segue a seguinte definição: “Se uma função f(x) é derivável em todos os pontos de um intervalo, chama-se função derivada de f(x) a função que em cada ponto desse intervalo tem para valor a derivada de f(x) nesse ponto” (CARVALHO, 1969, p. 561-562). Carvalho apresenta as simbolizações de Lagrange (1736-1813), Arbogast (1759-1803) e Cauchy (1789-1957) Newton e Leibniz, seguindo a função derivada de ordem n.

Essa abordagem, ao começar com uma rigorosa definição de derivada num ponto, trazendo logo a seguir o exemplo, procura entrar num nível mais acessível, por meio da experimentação de uma função algébrica, mostrando o que acontece com a função e com a sua derivada nas proximidades de um ponto dado. Ele procura seguir aquilo que Klein recomendava – começar com exemplos simples. Mas, tal abordagem não durou muito, logo o texto retoma o estilo formalizado, com muitas definições e alguns teoremas demonstrados.

A RELAÇÃO TEORIA E PRÁTICA

Todos os autores analisados abordaram aplicações de derivada, no mesmo tópico, qual seja, na teoria dos máximos e mínimos. Entretanto, há diferenças nas aplicações. Maeder e Carvalho apresentaram, nas aplicações da derivada 5 e 4 exercícios resolvidos, respectivamente; Bezerra 2 e os demais autores, não incluíram nenhum problema resolvido, apenas exercícios propostos. Maeder considerou problemas geométricos em que os máximos e mínimos são necessários para resolvê-los.

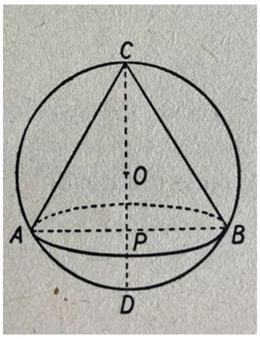
Quadro 3: Problema do retângulo inscrito em triângulo

"Inscrever em um triângulo dado, um retângulo de área máxima, tendo a sua base sobre a base do triângulo".	

Fonte: Maeder, 1955, p. 199

À direita no Quadro 3, a figura dada pelo autor dá suporte à resolução. Para solucionar o problema, o autor utilizou a derivada primeira e segunda para chegar à conclusão de que, para se obter a área máxima do retângulo inscrito, é preciso que y= $\frac{h}{2}$.

Quadro 4: Volume máximo do cone

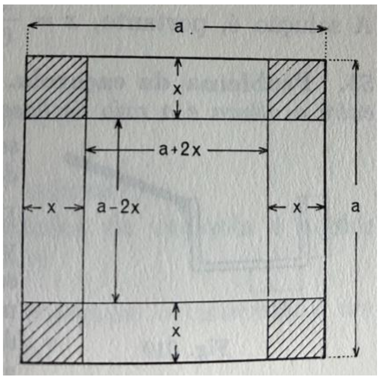
"Calcular a altura do cone de volume máximo que se pode inscrever em uma esfera de raio dado".	

Fonte: Maeder, 1955, p. 199

À direita no Quadro 4, a figura utilizada pelo autor dá suporte à resolução. Partindo da equação do volume do cone e considerando AP= x e CP= y, o raio da base e a altura do cone inscrito, respectivamente, ele chega à solução h= $\frac{4}{3}r$.

Por sua vez, as aplicações sobre máximos e mínimos resolvidas por Carvalho incluem o problema de otimização de uma caixa de metal (Quadro 5) e o problema de otimização do volume de um cilindro, que foi intitulado problema da caçarola (Quadro 6).

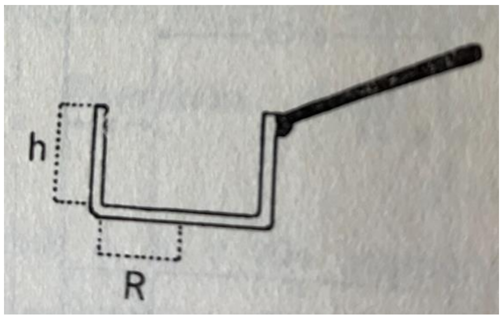
Quadro 5: Volume máximo da caixa

"Tem-se uma folha de metal cuja forma é um quadrado de lado a. Deseja-se fazer com ela uma caixa (sem tampa), cortando-se em seus cantos quadrados iguais e dobrando-se convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o maior possível".	

Fonte: Carvalho, 1969, p. 595

À direita no Quadro 5, a figura proposta pelo autor também auxilia na resolução. Resolvendo o problema, aplica os conceitos de derivada primeira e segunda e conclui que x= $\frac{a}{6}$.

Quadro 6: Problema da caçarola

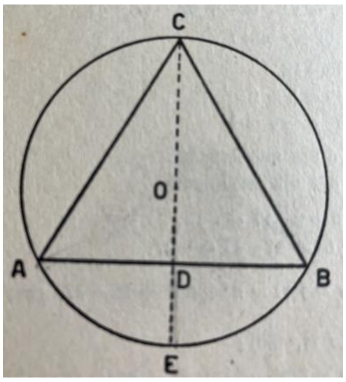
"Determinar qual deve ser a relação entre a altura e o raio da base de uma caçarola cilíndrica, de modo a se conseguir, na sua confecção, o máximo de economia do metal"	

Fonte: Carvalho, 1969, p. 596

À direita no Quadro 6, a figura apresentada pelo autor dá suporte à resolução. Para resolver o problema, encontrou-se os extremantes e conclui que a forma econômica da caçarola é R= h, ou seja, a altura e igual ao raio da base.

Por outro lado, Bezerra propôs, por exemplo, o seguinte problema geométrico de otimização (Quadro 7).

Quadro 7: Triângulo isósceles inscrito em círculo

"Qual é o triângulo isósceles de maior área que se pode inscrever num círculo dado?"	

Fonte: Bezerra, 196?, p. 240

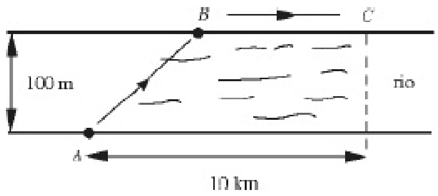
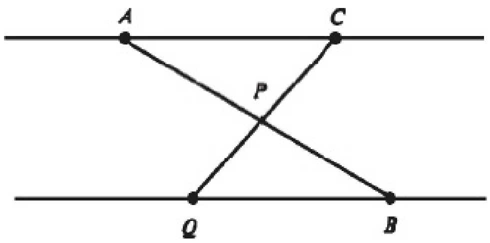
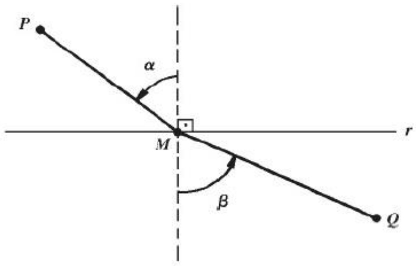
À direita no Quadro 7, a figura proposta ilustra à resolução. Bezerra começa com a área do retângulo ($S = \frac{1}{2}\ AB.CD$), usando as relações métricas do círculo e conclui que S= $\sqrt{2rx^3 - x^4}$, onde x= CD e r o raio do círculo. Chegando, assim, ao resultado de que o triângulo deve ser equilátero.

Os demais autores incluíram problemas com aplicações da derivada apenas nos exercícios propostos, sem ilustrações. Por exemplo: Roxo Et Al (194?, p. 177), propôs o seguinte exercício: "Calcular o acréscimo de volume de um cone de revolução, correspondente a um acréscimo elementar do raio r da base" e Quintella (1965, p. 127) apresentou o seguinte problema: "Qual é a área máxima de um retângulo que tem 24 m de perímetro?".

Os autores cumprem, em grande medida, com o programa oficial apresentando as aplicações da derivada, alguns trazendo o assunto mais detalhado e outros, mais teóricos, não resolvem os exercícios. Compreendendo que as ilustrações poderiam ser suportes didáticos para a resolução dos problemas.

Atualmente, no livro de Guidorizzi (2008) esta temática também foi incluída. Ele propõe problemas semelhantes aos de Anton Et Al, mas amplia as aplicações, numa valorização da prática. São 32 exercícios propostos. A título de exemplificação apresentamos, no Quadro 8, problemas de aplicação da derivada.

Quadro 8: Aplicações da derivada em Guidorizzi

Certa pessoa que se encontra em A, para atingir C, utilizará na travessia do rio (de 100m de largura) um barco com velocidade máxima de 10 km/h; de B a C utilizará uma bicicleta com velocidade de 15 km/h. Determine B para que o tempo gasto no percurso seja o menor possível.	
Considere duas retas paralelas r e s. Sejam A e C dois pontos distintos de r e B um ponto de s. Determine Q na reta s de modo que a soma das áreas dos triângulos APC e QPB seja mínima.	
Lei de refração de Snellius. Considere uma reta r e dois pontos P e Q localizados em semiplanos opostos. Uma partícula vai de P a M com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M a Q com velocidade constante v, também com movimento retilíneo. Mostre que o tempo de percurso será mínimo se $\frac{\sin\propto}{u} = \frac{\sin\beta}{v}$.	

Fonte: Guidorizzi (2008, p. 378-379)

O ensino universitário do CDI ainda, em muito, se assemelha ao ministrado no Ensino Secundário das décadas de 1940 a 1970. Disso, se pode fazer algumas inferências, como por exemplo, as situações de ensino do CDI foram preservadas por meio da manutenção de problemas envolvendo máximos e mínimos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A conclusão a que chegamos é de que existe uma convergência entre os autores, ao tratarem o conceito de derivada, o fazem no terceiro mundo conceitual de Tall, qual seja, aquele formal. A única tentativa que se aproxima de um mundo conceitual formal com mescla do corpóreo-simbólico é aquela do autor Carvalho. Assim, nitidamente, em quatro das cinco coleções analisadas, encontra-se a categoria abordagem formal simbólica para apresentar o conceito de função derivada e, em apenas uma delas, uma abordagem mesclada. Outro aspecto que identificamos, é que os livros didáticos não seguem à risca o que foi proposto por Klein, que era fugir das abstrações excessivas nesse nível de escolaridade. As abordagens da derivada estão mais próximas daquelas que eram utilizadas no ensino superior. Uma hipótese que talvez explique tais escolhas de abordagem poderia ser a de que os autores dessas obras, procurando seguir o programa oficial, tomaram como modelo os próprios livros que foram adotados em sua formação acadêmica. Esta hipótese está fundamentada nos seguintes fatos; Quintella, por exemplo, cita o livro *Analyse Mathématique* de Lucien Godeaux, da Universidade de Liège, escrito para os alunos da engenharia e ciências matemática, em 1846 (baseado em Picard, Jordan, Hadammard, etc) e Maeder citou *Lezioni di analisi algébrica e infinitesimal* de Tonolo, autor este que consta da bibliografia do curso de matemática da PUC-SP, em 1940-1942. Deve ter sido um desafio para esses autores tratarem conceitos do pensamento matemático avançado – como aquele de derivada, que envolve em sua base outro conceito, o de limite – de maneira a atender a um programa oficial, que nada mais era do que uma listagem de conteúdos, e, ainda, seguir os preceitos do matemático Felix Klein. Concluímos, também, que os autores tentaram mostrar algumas aplicações das derivadas no tópico teoria dos máximos e mínimos, seguindo as prescrições de Felix Klein.

Tendo em conta que em vários países, como Portugal, França, Alemanha, Espanha, Federação Russa, entre outros, o CDI integra os programas oficiais de matemática do ensino secundário, incluindo, naturalmente, o conceito de derivada, somos de opinião de o ensino de Cálculo Diferencial e Integral ainda é um conhecimento matemático pertinente para os currículos atuais, desde que acompanhado de novos métodos didáticos, a fim de que não seja uma mera transposição de conteúdo do Ensino Superior para o Ensino Médio. A função derivada é um conceito necessário na formação matemática dos estudantes do ensino médio pois, como dizia Sebastião e Silva (1951) ao defender o ensino do Cálculo Diferencial no Secundário, em Portugal, é preciso semear as ideias intuitivas que começam a germinar nesse nível da escolaridade e que poderão ser colhidas num momento oportuno.

AGRADECIMENTOS:

Agradeço a Fernando Rippe por suas valiosas contribuições ao texto original.

REFERÊNCIAS

ALÉSSIO, Amanda. **A importância do Cálculo Diferencial e Integral para a formação do professor de Matemática da Educação Básica**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Estadual Paulista.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**, v. 1, 10ª ed., Porto Alegre: Bookman, 2014.

ÁVILA, Geraldo. O ensino de Cálculo no 2° grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n° 18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.

BENITO, Augustin Escolano. **A escola como cultura**: experiência, memória e arqueologia. Campinas (SP): Alínea, 2017.

BEZERRA, Jairo. **Curso de Matemática**. 10ª ed. São Paulo: Editora Nacional, 196?

BRASIL. Ministério da Educação e Saúde Pública. Diário Oficial, 31 jul. 1931, p. 12.405-12.427.

BRASIL. Ministério da Educação e Saúde. Portaria n. 177, 16 mar.1943.

CARVALHO, Thales de Faria Mello. **Matemática para o terceiro ano colegial**. 5 ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1955.

CARVALHO, Carlos Augusto Santos. **Aspectos relevantes para uma história da evolução do currículo de Matemática na segunda metade do século XX- o caso do Colégio de Aplicação da UFRJ.** Diss. Mestrado em Ensino da Matemática, UFRJ, 2012.

CHOPPIN, A., & Bastos, T. M. H. C. (2012). O historiador e o livro escolar. **Revista História Da Educação,** *6*(11), 5–24. Recuperado de https://seer.ufrgs.br/index.php/asphe/article/view/30596

DOMINGOS, António Manuel Dias. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior.** Tese. Doutorado em Ciência da Educação. Universidade Nova de Lisboa, 2003.

GUIDORIZZI, Hamilton. **Um curso de cálculo**. 5ª ed. São Paulo: LTC, 2008.

KLEIN, Felix Klein. **Elementary Mathematics from an advanced Standpoint**. New York: Dover, 1945.

LIMA, Eliene; SILVA, Circe; VALENTE, Wagner. O Cálculo diferencial e integral: uma análise das tentativas de sua escolarização. **Anais** do 6 ENAPHEM, 2022.

LONGEN, Adilson – **Livros didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da educação matemática**. Tese. Doutorado em Educação. Universidade Federal do Paraná, 2007.

MAEDER, Algacyr Munhoz. **Curso de Matemática** – 3º livro – ciclo colegial. 5ª ed. São Paulo:Edições Melhoramentos, 1955.

MATOS, José Manuel. Prefácio. Maria Célia Leme da Silva e Thiago Pedro Pinto (org.) **História da educação matemática e formação de professores**: aproximações possíveis. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

OLIVEIRA FILHO, Francisco. **A Matemática do Colégio: livros didáticos e história de uma disciplina escolar.** Tese. Doutorado em Educação Matemática. Universidade Anhanguera, 2013.

OTONE, Maryneusa Cordeiro – **História da constituição da matemática do colégio no cotidiano escolar.** Tese. Doutorado em Educação Matemática. PUC-SP, 2011.

QUINTELLA, Ary. **Matemática** para o terceiro ano colegial. 12ª ed. São Editora Nacional, 1965.

RIBEIRO, Denise Franco Capello – **Um estudo da contribuição de livros didáticos de Matemática no processo de disciplinarização da matemática escolar do colégio -1943 a 1961**. Tese. Doutorado em Educação Matemática. PUC-SP, 20

ROXO, Euclides; CUNHA, Haroldo Lisboa; PEIXOTO, Roberto; DACORSO NETO, César. **Matemática** 2º Ciclo – 3ª série. 4ª ed. Rio de janeiro: Francisco Alves, 1955.

SCHÜLKE, A. Différentialle et dérivée. **L'Enseignement Mathématique**, 2011, p. 224-227.

SEBASTIÃO E SILVA, Sebastião. A análise infinitesimal no ensino secundário. **Gazeta De Matemática**, ano XII, n. 49, out. 1951, p. 1-4.

SILVA, Everaldo Paulo; SCHUBRING, Gert. Cálculo em matemática: um assunto para o ensino em geral ou específico para o ensino técnico. **Hist. Educ**. v. 20, n. 49, p. 65-80, maio/ago. 2006.

SILVA, Circe Mary Silva ; Rios, Diogo Franco. Apropriação de ideias Modernizadoras de Félix Klein em Práticas Docentes de Matemática no Colégio Gonzaga. *Com a palavra o professor*. 4 (8), 55-73, 2019.

TALL, David. To transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proff. in Grouws D.A. (ed.) **Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning,** Macmillan, New York, 495–511, 1992. Disponível em https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-to-amt.pdf

TALL, David. Using technology to support an embodied approach to learning concepts in Mathematics. In: **História e Tecnologia no Ensino de Matemática**. Luiz M. Carvalho e Luiz C. Guimaraes (Org.). Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2002, p. 1-28.

VAHL, Matheus Juske. **Santo Agostinho**: os fundamentos ontológicos do agir. Pelotas: Dissertatio Filosofia, 2016.

ZICCARDI, Lidia. **O curso de matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: uma história de sua construção/desenvolvimento/legitimação**. Tese. Doutorado em Educação Matemática. PUCSP, 2009.

ZUCCHERI, Luciana; ZUDINI, Verena. History of teaching Calculus. In. Alexander Karp e Gert Schubring (Ed.) **Handbok on the History of Mathematics Education**. New York, Heidelberg.