ACERVO
BOLETIM DO CENTRO DE DOCUMENTAÇÃO DO GHEMAT-SP

A CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE LIMITE A PARTIR DO ESTUDO DAS FUNÇÕES RACIONAIS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE TAREFAS POR MEIO DO GEOGEBRA

LA CONSTRUCTION DE LA NOTION DE LIMITE À PARTIR DE L'ÉTUDE DES FONCTIONS RATIONNELLES: UNE PROPOSITION DE SÉQUENCE DE TÂCHES À TRAVERS GEOGEBRA

Flavia dos Santos Ferreira[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-9349-5334

Eliane Santana de Souza Oliveira[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3981-1620

Submetido: 15 de junho de 2023 **Aprovado:** 01 de setembro de 2023

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma sequência de tarefas fundamentadas na Teoria Antropológica do Didático e na Abordagem Instrumental, cujo objetivo é apresentar aos professores e futuros professores de matemática da Educação Básica uma possibilidade de trabalhar as noções intuitivas de Limites a partir da construção do conceito de Funções Racionais e a análise do comportamento do seu gráfico por meio do *software* Geogebra. Salientamos a importância de trazer a relação com funções polinomiais e funções racionais para trabalhar as noções intuitivas de limites, buscando revelar a integração desses conteúdos da educação básica com as noções intuitivas de limites. Além disso, acreditamos que o uso de tecnologias e *softwares* na sala de aula podem auxiliar para um ensino de matemática mais compreensível e acessível para os estudantes. Esse trabalho visa também contribuir com o seminário temático "O Cálculo Diferencial e Integral: uma análise das tentativas de sua escolarização" no qual os pesquisadores trazem uma discussão sobre a inclusão do Cálculo Diferencial e Integral na Educação Básica, assim como buscamos apresentar os resultados iniciais da pesquisa "Instrumentalização e experimentação de um Percurso de Estudo e Pesquisas – PEP interdisciplinar por mediação tecnológica na formação inicial e continuada de professores de matemática", plano de trabalho vinculado ao projeto de pesquisa "Formação para Prática Interdisciplinar Docente: Construção de Tarefas por Mediação Tecnológica e Conteúdos para

ABSTRACT/ RESUMEN/ RÉSUMÉ

Le présent travail présente une séquence de tâches basées sur la Théorie Anthropologique de la Didactique et l'Approche Instrumentale, dont l'objectif est de présenter aux enseignants et futurs enseignants de mathématiques dans l'Éducation de Base une possibilité de travailler avec les notions intuitives de Limites à partir de la construction des concept de Functions Rationale et l'analyse du comportement de son graphe à travers le logiciel Geogebra. Nous soulignons l'importance de faire travailler la relation avec les fonctions polynomiales et les fonctions rationnelles avec les notions intuitives de limites, en cherchant à révéler l'intégration de ces contenus d'éducation de base avec les notions intuitives de limites. De plus, nous croyons que l'utilisation des technologies et des logiciels en classe peut contribuer à rendre l'enseignement des mathématiques plus compréhensible et accessible aux élèves. Ce travail vise également à contribuer au séminaire thématique "Calcul Différentiel et Intégral : une analyse des tentatives de sa scolarisation" dans lequel les chercheurs apportent une discussion sur l'inclusion du Calcul Différentiel et Intégral dans l'Éducation de Base, ainsi que nous cherchons à présenter les premiers résultats de la recherche « Instrumentalisation et expérimentation d'un Parcours d'Études et de Recherche interdisciplinaire – PEP par médiation technologique dans la formation initiale et continue des professeurs de mathématiques », plan de travail lié au projet de recherche « Formation à la pratique pédagogique interdisciplinaire : Construction

[1] Graduanda em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Endereço para correspondência: Rua São José, Nº98, São Bento do Inhatá, Amélia Rodrigues, Bahia, Brasil, CEP: 44235-000. E-mail: flaviasantos821@gmail.com.

[2] Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana (UFBA/UEFS). Professora Adjunta A na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Feira de Santana, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Castro Alves, Nº468, Centro, Santo Estevão, Bahia, Brasil. E-mail: essoliveira@uefs.br.

Web no Ensino de Matemática e Química", por meio do qual vamos apresentar aos professores da Educação Básica possibilidades para transformarem suas aulas de matemática a partir de um ambiente interativo e investigativo.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático; Abordagem Instrumental; Limites.

de Tâches de la technologie de médiation et du contenu pour le Web dans l'enseignement des mathématiques et de la chimie », à travers lequel nous présenterons aux enseignants de l'éducation de base les possibilités de transformer leurs cours de mathématiques à partir d'un environnement interactif et d'investigation.

Mot-clé: Théorie Antropologique du Didactique; Approche Instrumentale; Limites.

INTRODUÇÃO

O interesse em contribuir para essa discussão sobre a escolarização do Cálculo surge após tomarmos conhecimento sobre o projeto de pesquisa "O Cálculo Diferencial e Integral: uma análise das tentativas de sua escolarização" no qual os pesquisadores buscam analisar as discussões sobre a inclusão do Cálculo Diferencial e Integral na Educação Básica. Através das discussões da Teoria Antropológica do Didático e a Abordagem Instrumental mostramos de que forma podemos levar esse conteúdo para os estudantes do Ensino Médio por meio de uma sequência de tarefas que tem como objetivo apresentar aos professores e futuros professores de Matemática da Educação Básica uma proposta para a construção do conceito de função racional e realizar o estudo do comportamento do seu gráfico utilizando como mediador o *software* Geogebra, para que intuitivamente as noções de Limite, Limite Infinito e Limite no Infinito fossem sendo apresentadas aos estudantes.

Além disso, queremos mostrar também os primeiros resultados obtidos para a pesquisa "Instrumentalização e experimentação de um Percurso de Estudo e Pesquisas – PEP interdisciplinar por mediação tecnológica na formação inicial e continuada de professores de matemática", plano de trabalho vinculado ao projeto de pesquisa "Formação para Prática Interdisciplinar Docente: Construção de Tarefas por Mediação Tecnológica e Conteúdos para Web no Ensino de Matemática e Química". Neste plano de trabalho vamos proporcionar aos professores de matemática uma reflexão acerca de suas práticas pedagógicas e sobre os conteúdos matemáticos, levando para a Educação um novo olhar sobre o ensino de matemática e proporcionando aos estudantes a experiência de um aprendizado interativo e investigativo.

A partir de uma breve discussão sobre os conceitos da Teoria Antropológica do Didático, que é a principal teoria da nossa pesquisa, a qual a partir dos elementos da abordagem praxeológica buscamos conteúdos presentes na matriz curricular do Ensino Médio que servissem de base para a construção intuitiva dos conceitos de Limites. De outra parte, mostrarmos a importância em trazer para a Educação Básica as funções racionais, pois enxergamos nesse conteúdo um grande potencial de aprendizado dos conceitos iniciais do Cálculo na etapa do Ensino Médio. Como um mediador desse conteúdo e o estudante trazemos a proposta da utilização do software Geogebra justificado pela Abordagem Instrumental, contribuindo na defesa do uso de tecnologias e *softwares* nas aulas de matemática.

Acreditamos que através das tecnologias e *softwares* é possível que os alunos tenham uma interação direta com o conteúdo e ao professor caberá o papel de mediador desse processo. Desta forma, aspectos mais importantes e que muitas vezes passam despercebidos numa aula tradicional podem ser explorados numa tarefa cuja resolução seja mediada por um software ou ferramenta tecnológica. Assim, níveis cada vez mais altos de abstração matemática podem ser alcançadas, do mesmo modo que conteúdos que até então fazem parte da matriz curricular dos cursos de nível superior poder ser levados para a Educação Básica de maneira compreensível e acessível para os estudantes.

REFERENCIAL TEÓRICO

Consideramos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Chevallard (1999) como uma teoria importante para que possamos fazer reflexões e compreender as relações de ensino e aprendizado dos conceitos matemáticos. Apresentaremos, de acordo com Artigue (2011 *apud* CHAACHOUA; BITTAR, 2018) a evolução da TAD a partir do conceito de sensibilidade, a primeira diz respeito a centralização sobre a noção de instituição e a segunda sobre a relatividade de conhecimentos matemáticos. Os autores mostram que Chevallard reconhece que o saber não é algo que existe em mundo a parte do ser humano, mas sim que esse saber é fruto das práticas humanas e esse saber vive em uma ou mais instituições. A partir disso são apresentadas três proposições que dão base para a Teoria da Transposição Didática e a Ecologia dos Saberes e que posteriormente veremos sua importância para a criação e a ampliação da TAD.

> Daí as proposições: (1) todo saber é saber de uma instituição, (2) um mesmo objeto do saber pode viver em diferentes instituições, (3) para que um saber possa viver em uma instituição, é necessário que ele se submeta a uma série de restrições, o que implica em modificações sobre o saber, caso contrário, ele não consegue se manter na instituição. (CHAACHOUA; BITTAR, 2018, p. 30)

A Teoria da Transposição Didática reconhece a existência de saberes distintos e estuda os processos envolvidos na passagem do saber de uma instituição para outra. Enquanto que Ecologia dos Saberes nos dará ferramentas para questionar e esmiuçar a realidade desse saber do seguinte modo:

> O que existe e por quê? Mas também, o que não existe, e por quê? E o que poderia existir? Sob quais condições? Inversamente, dado um conjunto de condições, quais objetos podem viver ali ou, ainda, quais objetos são impedidos de viver nestas condições. (ARTAUD, 1997, p. 101 *apud* ALMOULOUD et al., 2021, p. 436)

A partir da ampliação dessas teorias são introduzidos conceitos primitivos a TAD. Dentro dessa perspectiva o primeiro deles é o conceito de objeto que segundo Chevallard (1999) são: as instituições, os indivíduos e as posições ocupadas por esses indivíduos nessas instituições. Além disso, temos também a Relação Pessoal e Institucional que são definidas, respectivamente, como sendo de quais maneiras os indivíduos de uma instituição relacionam-se com determinado objeto e as formas como esse objeto é explorado em determinada instituição. Logo, com base nessas discussões iniciais os autores apontam que Chevallard (1999) insere a didática no campo da antropologia, ou seja, passamos a analisar os sujeitos diante as situações matemáticas.

Após essa apresentação sobre os conceitos que permitiram a evolução e ampliação da TAD, podemos agora discorrer sobre a abordagem praxeológica da TAD, apresentando as noções de tarefa, técnica, tecnologia e teoria que nos permitem modelar as tarefas matemáticas. Essa modelação é feita com base em três postulados:

> 1. Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas.
> 2. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica.
> 3. A ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e restrições que permitem sua produção e utilização nas instituições. (ALMOULOUD, 2007, p.114-116)

Os dois primeiros postulados definem o bloco prático - técnico (*práxis*) que é composto pelas tarefas e técnicas. A técnica pode ser entendida como formas de fazer uma determinada tarefa, porém não necessariamente estamos nos referindo a uma maneira padronizada ou ainda sobre um algoritmo específico que dê conta de tarefas com características semelhantes. Às tarefas são identificadas por meio dos verbos de ação, por exemplo, calcular, resolver, somar e etc. que ditam qual é o objetivo proposto para aquela tarefa. Às técnicas utilizadas em uma determinada tarefa existem de maneira limitada dentro da instituição ao qual aquela tarefa foi elaborada, mas podemos encontrar outras técnicas dentro de outras instituições. Além disso, Amouloud *et al*. (2018) afirmam que as tarefas de uma instituição se tornam rotineiras quando deixam de apresentar para a sua realização a elaboração de novas técnicas. Por isso, para que novas técnicas sejam produzidas e levadas para uma instituição é necessário que suas tarefas sejam revisadas e problematizadas.

O último postulado diz respeito ao bloco *logos* da TAD, no qual está inserida a noção de tecnologia e a teoria. A tecnologia é uma justificativa para uma técnica, para que essa tecnologia exista é necessário que ela seja reconhecida, válida e justificada por uma instituição. Do mesmo modo, temos que a teoria é a justificativa da tecnologia. A junção desses blocos forma o que chamamos de organização praxeológica. Portanto, de acordo com Almouloud (2007, p. 117) “Ela pode ser reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um *logos* que a justifica, a acompanhe e que lhe dá razão”. Logo, podemos perceber que há uma relação de interdependência entre os dois blocos e para que um conhecimento produzido seja considerado completo, dentro da perspectiva da TAD, deve contemplar os dois blocos.

Para a nossa tarefa estamos considerando a produção e o levantamento de técnicas presentes na Educação Básica e no Ensino Superior, porém para que possamos cumprir com esse objetivo consideramos fundamental a mediação tecnológica para a construção do conhecimento que será produzido. Portanto, para esse processo vamos nos apoiar na Abordagem Instrumental proposta por Rabardel em 1995.

A Abordagem Instrumental tem como objetivo discorrer sobre a diferença entre *artefato* e *instrumento*, além de descrever por meio dos *Esquemas* a relação estabelecida entre o sujeito e a ferramenta (artefato). Denominamos como artefato um dispositivo utilizado pelo sujeito como um mediador de uma tarefa, a partir do momento em que esse sujeito se apropria desse dispositivo para a realização da tarefa temos que ele é transformado em instrumento. Segundo Oliveira *et al*. (2022, p. 18):

> Nesse sentido, o utilizador (sujeito) deve desenvolver habilidades e competências para reconhecer situações nas quais um dado instrumento é apropriado e, em seguida, executar as situações por meio desse instrumento, por meio de esquemas de utilização.

Os esquemas de utilização são divididos em três categorias: *esquemas de uso*, *esquemas de ação instrumental* e *esquemas de atividades coletivas instrumentais*. Compreendemos os esquemas de uso como sendo a primeira etapa da atividade onde será apresentado o artefato e suas características, em seguida, os esquemas de ação instrumental correspondem a fase da atividade em que o artefato será um meio para sua realização. Podemos observar que nesse momento o sujeito começa a se apropriar dessa ferramenta para que na última etapa, dos esquemas de atividades coletivas instrumentais, esse artefato transforme-se num instrumento que será utilizado num conjunto de atividades que podem ser realizadas coletivamente ou de forma compartilhada.

Sobre a possibilidade da implementação do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no Ensino Médio, observamos que há uma série de restrições que não permitem o ensino desse conteúdo ainda na Educação Básica. Segundo Molon e Figueiredo (2015), se formos considerar o estudo do CDI com toda a sua formalidade, simbologia e demonstrações no Ensino Médio veremos que o seu ensino é praticamente impossível, pois os estudantes ainda não possuem todas as ferramentas adequadas para a construção desse conhecimento. Porém, os autores trazem como proposta a construção intuitiva dos conceitos do CDI a partir do estudo das funções, especificamente as funções polinomiais do segundo grau, observando o comportamento do gráfico dessa função a medida em que vão sendo tomados no conjunto do domínio dessa função valores maiores e menos para sua variável e utilizando o *software* Geogebra para a resolução das tarefas propostas. Ainda sobre os estudos das funções, os autores apontam que:

> No Ensino Médio ocupa-se praticamente todo o primeiro ano com formalismos da teoria dos conjuntos, definições de funções injetoras, bijetoras e sobrejetoras, deixando de lado um ponto muito interessante que se pode apresentar aos alunos: a aplicação de cada função, a visualização do comportamento de cada gráfico, entre outros aspectos. (MOLON; FIGUEIREDO, 2015, p. 157)

Dando continuidade sobre as discussões acerca do ensino das funções, Molon e Figueiredo (2015) também destacam sobre a importância em se enfatizar as aplicações e a visualização do comportamento dos gráficos das funções, pois afirmam que a falta desse recurso na Educação Básica pode refletir em dificuldades posteriormente, no Ensino Superior, nos estudos do CDI. Assim, corroborando para que essa disciplina ainda seja responsável pelos altos índices de reprovação dos cursos superiores por todo o país.

METODOLOGIA

Esta pesquisa busca contemplar as três fases iniciais do plano de trabalho intitulado como: Instrumentalização e experimentação de um Percurso de Estudo e Pesquisas – PEP interdisciplinar por mediação tecnológica na formação inicial e continuada de professores de matemática. Desta forma, trouxemos na forma da análise da proposta de uma sequência de tarefas os resultados preliminares do aprofundamento teórico feito a respeito da TAD e a Abordagem Instrumental, o levantamento teórico sobre conteúdos de matemática da Educação Básica que os professores possuem mais dificuldades em ensinar e as ferramentas tecnológicas e os *softwares* com potencial de uso nas aulas de matemática. Utilizaremos a metodologia qualitativa para analisar esses primeiros resultados, segundo Creswell (2007, p. 184) nesse método é "empregado diferentes alegações de conhecimento, estratégias de investigação e métodos de coleta e análise de dados".

Portanto foram construídas três tarefas, que se encontra no Apêndice deste trabalho, para que o conceito de função racional fosse sendo construído progressivamente, ao mesmo tempo em que implicitamente vão sendo construídas também as noções de Limites, Limites Infinitos e Limites no Infinito. Vale aqui ressaltar que o conteúdo de Funções Racionais não faz parte da matriz curricular do Ensino Médio, mas a relevância desse tema para a Educação Básica pode ser justificada pelo seguinte fato:

> [...] a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (BRASIL, 2017, p. 528 – 529)

A primeira tarefa construída caracteriza-se na etapa de *esquema de uso* da abordagem instrumental, o objetivo é apresentar aos estudantes qual a proposta do *software* Geogebra (artefato), os elementos da sua interface e seus comandos. Para esta etapa vamos realizar o estudo das funções polinomiais do primeiro e segundo, buscando analisar as características do seu gráfico, seus parâmetros e domínio das funções, ao mesmo tempo em que os estudantes vão conhecendo as funcionalidades do *software* que servirão de base para as tarefas posteriores. Consideramos essa etapa importante para que os estudantes possam se familiarizar com esse recurso tecnológico que assumirá um papel fundamental na construção do aprendizado sendo o mediador entre o conteúdo e o estudante. Além disso, essa tarefa também pode servir como uma revisão sobre o conceito de função e as características das funções polinomiais do primeiro e segundo grau.

A segunda tarefa está justificada no *esquema de ação instrumental*, na qual será realizada a construção do conceito de uma função racional. Para essa etapa sugerimos que sua resolução seja feita individualmente, pois assim podemos verificar quais são as dificuldades de aprendizagem dos estudantes em relação ao conteúdo. Como motivação para esse estudo, vamos tomar como ponto de partida as operações de adição, multiplicação e divisão entre as funções polinomiais, visto que, na Educação Básica durante o estudo desse conteúdo é mostrado que a soma, subtração e multiplicação sempre terá como resultado uma terceira função polinomial, porém quando analisamos a divisão entre duas funções polinomiais podemos observar que o resultado não será necessariamente um outro polinômio.

Dessa forma, vamos dar início ao estudo sobre as Funções Racionais construindo o seu conceito, analisando suas características e compreendendo o seu domínio a partir da construção do seu gráfico no *software* Geogebra. Consideramos essa etapa fundamental, pois a partir dessa tarefa os estudantes irão se apropriar do *software* Geogebra transformando-o em um instrumento para a realização da próxima etapa.

A terceira tarefa construída contempla a fase de *esquemas de atividades coletivas instrumentais*; o nosso objetivo é dar continuidade aos estudos das funções racionais vistos anteriormente e implicitamente apresentar aos estudantes as noções intuitivas de limites, que é objetivo dessa tarefa. Para essa etapa é fundamental que haja o compartilhamento das informações e aprendizados adquiridos, além da apropriação do *software*. Desta forma, recomenda-se que a tarefa seja feita em grupos na sala de aula e que após sua finalização seja feita a socialização dos seus resultados. Podemos observar que essa última fase da Abordagem Instrumental está em consonância com o que diz a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre a importância de os estudantes desenvolverem essa capacidade de justificar, apresentar e interagir com os resultados obtidos não apenas por meio da linguagem matemática, mas trazendo também a sua argumentação por meio da linguagem materna (BRASIL, 2017).

Nesta etapa, o foco será a construção dos gráficos das funções racionais apresentando aos estudantes intuitivamente o conceito de assíntotas verticais e horizontais, além de analisar o comportamento dos valores da imagem da função a medida em que tomamos no seu domínio valores próximos a sua restrição. A partir desta etapa os estudantes podem observar que há casos em que, ao tomarmos um intervalo à esquerda ou à direita muito próximo à restrição do seu domínio a função apresentará na sua imagem valores cada vez mais próximos a um número, e consequentemente mostrará a noção intuitiva de limite.

Assim como, vamos ter os casos em que repetindo esse mesmo procedimento a função vai apresentar na sua imagem valores cada vez maiores e distintos, fato que está relacionado às assíntotas verticais da função o que possibilita a construção da noção intuitiva de limites infinitos. Por fim, funções em que ao consideramos para sua variável valores cada vez mais próximos do infinito percebemos que a sua imagem vai se aproximar cada vez mais para um determinado valor, concluindo assim a compreensão do conceito de assíntotas horizontais e apresentando aos estudantes intuitivamente a noção de limites no infinito.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, por meio da proposta dessa tarefa objetivamos apresentar aos professores e futuros professores de matemática da Educação Básica, uma possibilidade de trabalhar as noções intuitivas de Limites a partir da construção do conceito de Funções Racionais e a análise do comportamento do seu gráfico por meio do *software* Geogebra. Destacamos a relevância em relacionar as funções polinomiais e funções racionais para trabalhar as noções intuitivas de limites, com o intuito de revelar a integração desses conteúdos da educação básica com as noções intuitivas de limites, por meio de tarefas com instrumentos tecnológicos.

Assim, refletimos sobre uma forma de integrar os conteúdos, que a príncipio, existem apenas nas grades curriculares do Ensino Superior com os da Educação Básica por meio de um tratamento adequado e com a mediação de um *sofware* para sua realização. Podemos observar também que apesar das Funções Racionais, conteúdo selecionado para apresentar aos estudantes as noções intuitivas de Limites, Limites Infinitos e Limites no Infinito, não aparecer explicitamente na BNCC é possível a sua construção tomando como ponto de partida as funções polinomiais e a análise do comportamento dos seus gráficos.

Outro ponto relevante para esta pesquisa é mostrar como a TAD e sua abordagem praxeológica podem ser ferramentas importantes para as reflexões sobre o ensino e aprendizado de matemática, principalmente quando essas reflexões são feitas com base nas observações das tarefas de uma instituição. Como apresentado anteriormente, as instituições devem elaborar constantemente novas tarefas em que sejam exigidas a produção de novas técnicas para sua realização.

Pois assim, conseguimos apresentar uma matemática investigativa e acessível para os estudantes da Educação Básica. Não restringindo o seu ensino apenas ao modelo tradicional e nem mesmo apresentando a matemática sob uma ótica fragmentada, nos quais os conteúdos vistos na Educação Básica não se articulam entre si e muito menos dialogam com o Ensino Superior. Por fim, almejamos em pesquisas futuras aplicar a sequência elaborada e trazer uma análise dos resultados obtidos, bem como, revelar de que maneira essa proposta de sequência de tarefas permite uma reflexão aos futuros professores e professores da Educação Básica sobre como as práticas têm dialogado com a sua formação inicial.

AGRADECIMENTOS

Esta pesquisa foi realizada com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa da Bahia -FAPESB e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq Chamada MCTIC/CNPq Nº 28/2018.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. A teoria antropológica do didático. In: ALMOULOUD, Saddo Ag (org.). **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. p. 111 – 123.

ALMOULOUD, Saddo; NUNES, José Messildo Viana; PEREIRA, José de Carlos de Souza; FIGUEROA, Teodora Pinheiro. Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. **Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco**, v. 11, n. 24, p. 427-467, 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educar é a base**. Matemática e Suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e suas habilidades. 2017. p. 532 – 546. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf . Acesso em: 02 mar. 2023.

CHAACHOUA, Hamid; BITTAR, Marilena. **A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas**. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 9, n. 1, p. 29-44, 2018.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução: Luciana de Oliveira da Rocha. - 2. ed. - Porto Alegre: Artmed, 2007.

JACOMINO, Thiago Marques Zanon. **Funções racionais no ensino médio**. 2013. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Goytacazes, 2013.

MOLON, Jaqueline; FIGUEIREDO, Edson Sidney. Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do *software* Geogebra. **Ciência e Natura**, v. 37, p. 156-178, 2015.

PEREIRA, José Wilson; SILVA, Anderson Douglas Pereira Rodrigues da; SANTANA, Walenska Maysa Gomes de. **A Abordagem Instrumental e a Apropriação do Artefato Tecnológico Apprenti Géomètre 2 em uma Situação Proposta**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, XII., 2016, São Paulo. *Anais*..., São Paulo, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/8170_4362_ID.pdf. Acesso em: 02 mar. 2023.

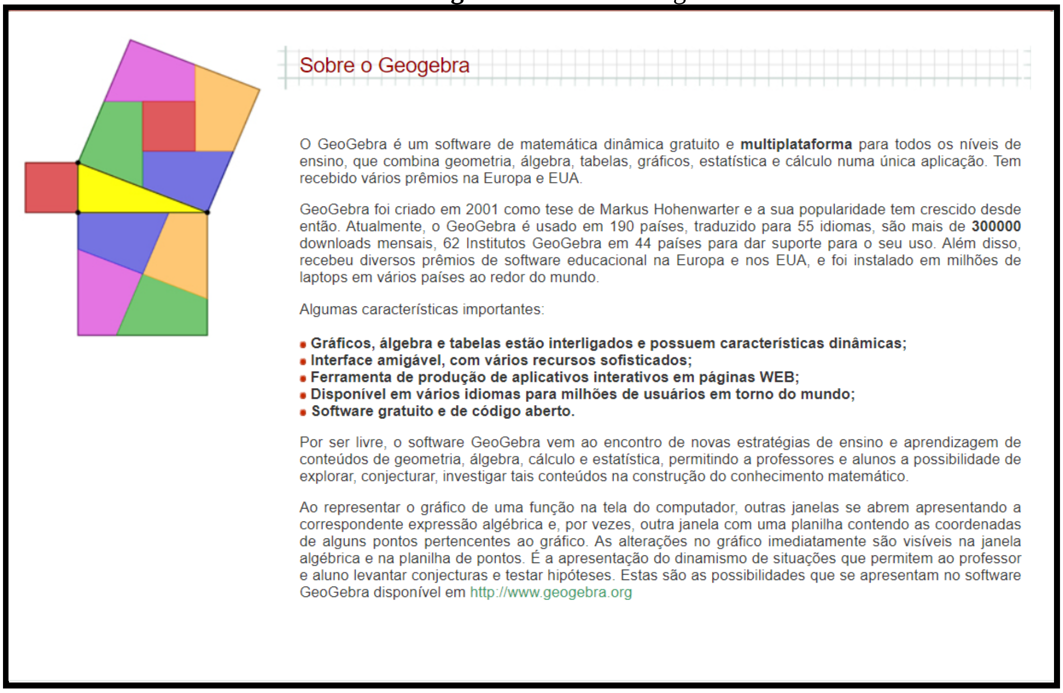
OLIVEIRA, Eliane Santana de Souza; OLIVEIRA, Glauco Felipe Cerqueira; FARIAS, Luiz Marcio Santos; CARVALHO, Edmo Fernandes; SOUZA, Amanda Santana de. Formações Interdisciplinares por Mediação Tecnológica: o PEP como dispositivo didático na formação continuada e inicial de professores de matemática. In: CARVALHO, Edmo Fernandes; OLIVEIRA, Eliane Santana de Souza; FARIAS, Luiz Marcio Santos (org.). **Formação para Prática Docente Interdisciplinar: investigações e experimentações sobre mediação tecnológica no ensino de Matemática e Química**. Curitiba: Editora CRV, 2022. p. 13-34.

Apêndice

A CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE LIMITE A PARTIR DO ESTUDO DAS FUNÇÕES RACIONAIS

TAREFA I: Conhecendo o software Geogebra

Figura 1- Sobre o Geogebra



Sobre o Geogebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e **multiplataforma** para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA.

GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de **300000** downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo.

Algumas características importantes:

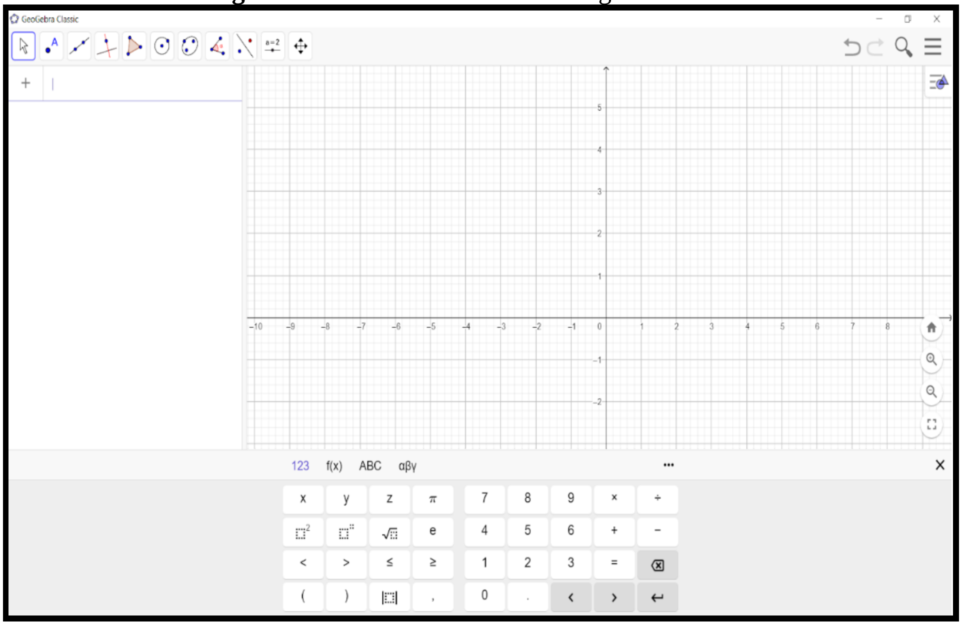
- **Gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas;**
- **Interface amigável, com vários recursos sofisticados;**
- **Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB;**
- **Disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo;**
- **Software gratuito e de código aberto.**

Por ser livre, o software GeoGebra vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático.

Ao representar o gráfico de uma função na tela do computador, outras janelas se abrem apresentando a correspondente expressão algébrica e, por vezes, outra janela com uma planilha contendo as coordenadas de alguns pontos pertencentes ao gráfico. As alterações no gráfico imediatamente são visíveis na janela algébrica e na planilha de pontos. É a apresentação do dinamismo de situações que permitem ao professor e aluno levantar conjecturas e testar hipóteses. Estas são as possibilidades que se apresentam no software GeoGebra disponível em http://www.geogebra.org

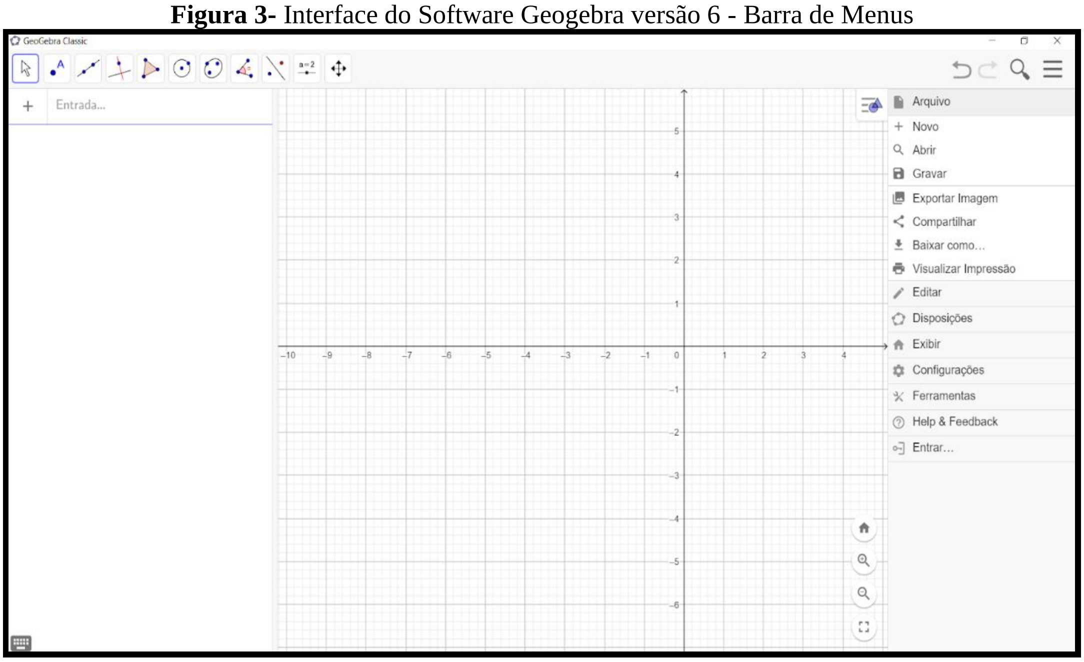
Fonte: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Desenvolvido por DTI - Núcleo de Mídias Digitais

Figura 2- Interface do software Geogebra versão 6



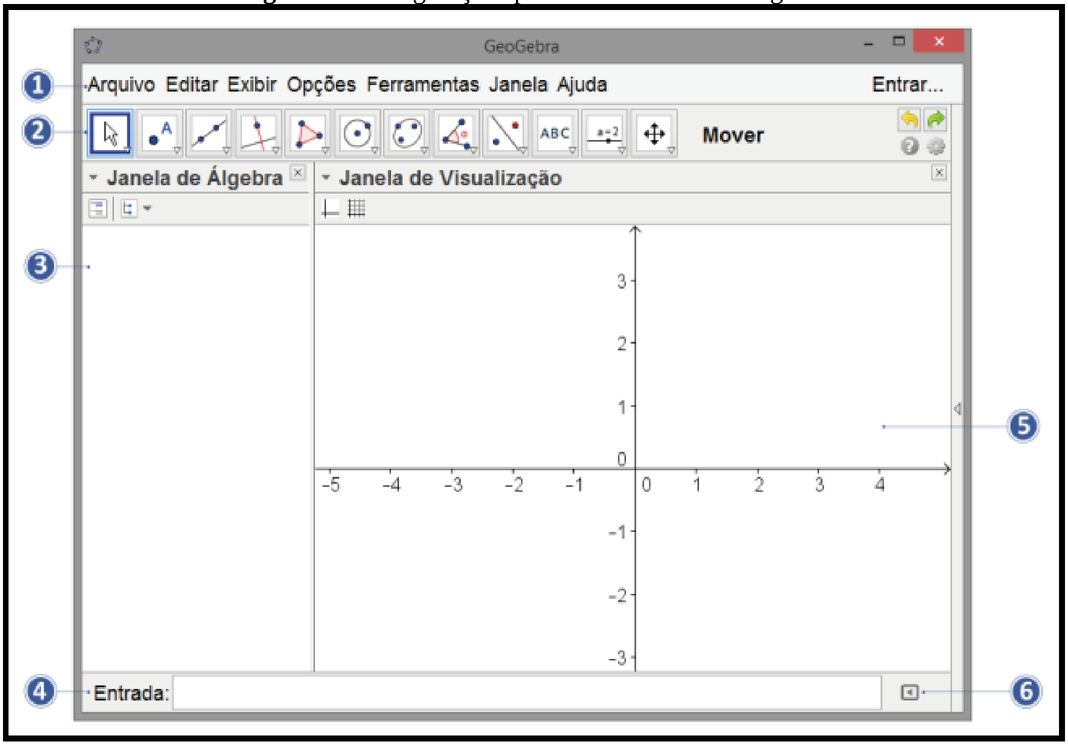
Fonte: A autora (2023)

Figura 3- Interface do Software Geogebra versão 6 - Barra de Menus



Fonte: A autora (2023)

Figura 4- Configurações padrão do software Geogebra

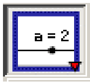


Fonte: O Geogebra

1. **Barra de Menus:** nela encontramos a opção de salvar o projeto (.ggb), abrir um novo projeto, fazer o download do projeto e a configuração global da página, onde podemos ajustar o tamanho da fonte, o número de casas decimais após a vírgula de um número decimal e mudar o idioma.
2. **Barra de Ferramentas:** concentra alguns comandos do software, por exemplo, comandos para construirmos retas, figuras planas, calcular áreas e distâncias, escrever textos e etc.
3. **Janela de Álgebra:** é onde será exibido às coordenadas, às medidas das áreas de figuras planas ou da distância de uma reta, os textos, às equações e funções, entre outros.
4. **Entrada:** o campo de entrada é onde vamos digitar os comandos do Geogebra, funções, equações, coordenadas e etc.
5. **Janela de Visualização:** é a área que será exibida às construções feitas a partir dos comandos digitados no campo de entrada ou construídos diretamente a partir dos comandos da Barra de Ferramentas.
6. **Lista de Comandos:** são comandos pré-definidos e que vão além daqueles exibidos na Barra de Ferramentas.

Construindo gráficos das funções polinomiais de 1º e 2º grau no Geogebra

- **Função polinomial do primeiro grau**

1. Clique no ícone  e selecione a opção Controle Deslizante. Vamos criar dois controles deslizantes para os parâmetros **a** e **b**, respectivamente, com as seguintes características:

a) a = 1, valor mínimo = -20, valor máximo = 20 e incremento = 0.1

b) b = 1, valor mínimo = -20, valor máximo = 20 e incremento = 0.1

2. Na caixa de entrada digite a seguinte lei de formação: **f(x) = ax + b**

3. Movimente os controles deslizantes **a** e **b** para criar as funções.

4. Para analisar o sinal da função digite na caixa de entrada os seguintes comandos:

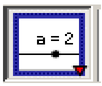
a) **f(x) < 0**: para determinar para quais valores do domínio a função é negativa;

b) **f(x) > 0**: para determinar para quais valores do domínio a função é positiva;

c) Digite na caixa de entrada o comando: **Interseção (<Função>, <Eixo X>)** ou **Raiz (<Função>)** para encontrar o zero da função, ou seja, quando **f(x) = 0**.

5. Para restringir o domínio da função digite na caixa de entrada o seguinte comando: **Função (< Função >, < Valor de x Inicial >, < Valor de x Final >)**

- **Função polinomial do segundo grau**

1. Clique no ícone  e selecione a opção Controle Deslizante. Vamos criar controles deslizantes para os parâmetros **a**, **b** e **c**, respectivamente, com as seguintes características:

a) a = 1, valor mínimo = -20, valor máximo = 20 e incremento = 0.1

b) b = 1, valor mínimo = -20, valor máximo = 20 e incremento = 0.1

c) c = 1, valor mínimo = -20, valor máximo = 20 e incremento= 0.1

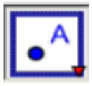
2. Na caixa de entrada digite a seguinte lei de formação: **f(x) = ax^2 + bx + c.**

3. Movimente os controles deslizantes **a**, **b** e **c** para criar as funções.

4. Para determinar os pontos de máximo e mínimo vamos renomear a função. Renomeie na caixa de entrada a lei de formação para: **f: y = ax^2 + bx + c.**

5. Movimente o controle deslizante **a** para um valor positivo e em seguida digite na caixa de entrada o comando **Vértice (f)** para encontrar o ponto mínimo da função.

6. Movimente o controle deslizante **a** para um valor negativo e em seguida digite na caixa de entrada o comando **Vértice (f)** para encontrar o ponto máximo da função.

7. Para determinar às raízes da função clique ícone  e selecione a opção Raízes.
8. Para analisar o sinal da função digite na caixa de entrada os seguintes comandos:

a) **f(x) < 0**: para determinar para quais valores do domínio a função é negativa;

b) **f(x) > 0**: para determinar para quais valores do domínio a função é positiva;

c) Digite na caixa de entrada o comando: **Interseção (<Função>, <Eixo X>)** ou **Raiz (<Função>)** para encontrar o zero da função, ou seja, quando **f(x) = 0**.

9. Para restringir o domínio da função digite na caixa de entrada o seguinte comando: **Função (< Função >, < Valor de x Inicial >, < Valor de x Final >)**

TAREFA II: Construindo o conceito de função racional

Operações entre funções polinomiais

- **Adição e subtração**

1. Digite na caixa de entrada seis funções polinomiais em que $1 \leq \text{grau}(f(x)) \leq 6$.
2. Novamente, na caixa de entrada digite uma nova função em que sua lei de formação seja dada a partir da soma ou subtração entre as funções do item anterior.
3. Para obter o resultado das operações digite na caixa de entrada o seguinte comando: **Expandir (< Função>)**.
4. Em relação aos resultados obtidos, essas novas funções são polinomiais?
5. É correto afirmar que: a adição e subtração entre funções polinomiais sempre terá como resultado uma função polinomial? Justifique.
6. Descreva as características dos gráficos dessas novas funções observando qual o papel de cada termo da função em relação ao comportamento de seu gráfico, a relação entre a paridade do expoente do coeficiente do termo maior grau e a característica do gráfico, qual o seu domínio e sua relação com o comportamento do gráfico.

- **Multiplicação e divisão**

1. Digite na caixa de entrada seis funções polinomiais em que $1 \leq \text{grau}(f(x)) \leq 6$.
2. Novamente, na caixa de entrada digite uma nova função em que sua lei de formação seja dada a partir da soma ou subtração entre as funções do item anterior.
3. Para obter o resultado das operações digite na caixa de entrada o seguinte comando: **Expandir (< Função>)**.
4. Em relação aos resultados obtidos, essas novas funções são polinomiais?
5. É correto afirmar que: a multiplicação e divisão entre funções polinomiais sempre terá como resultado uma função polinomial? Justifique.
6. Descreva as características dos gráficos dessas novas funções observando qual o papel de cada termo da função em relação ao comportamento de seu gráfico, a relação entre a paridade do expoente do coeficiente do termo maior grau e a característica do gráfico, qual o seu domínio e sua relação com o comportamento do gráfico.

Introdução às funções racionais

Anteriormente vimos que nem sempre a divisão entre duas funções polinomiais terá como quociente uma função polinomial, nesses casos obtemos uma função do tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde p(x) e q(x) são dois polinômios distintos e que será denominada como função racional. Nos itens a seguir vamos aprofundar os estudos sobre essas funções.

1. Digite a seguinte função na caixa de entrada do software Geogebra: $f(x) = \frac{1}{x+1}$

a. Encontre os interceptos x e y do gráfico.
b. O gráfico possui simetria em relação aos eixos ou a origem?
c. Calcule o zero da função do denominador e marque com uma reta no gráfico.
d. Construa uma tabela de valores e verifique para quais valores a função é positiva e negativa.

2. Digite a seguinte função na caixa de entrada do software Geogebra: $g(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}$

a. Encontre os interceptos x e y do gráfico.
b. O gráfico possui simetria em relação aos eixos ou a origem?
c. Calcule o zero da função do denominador e marque com uma reta no gráfico.
d. Construa uma tabela de valores e verifique para quais valores a função é positiva e negativa.

3. Digite a seguinte função na caixa de entrada do software Geogebra: $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$

a. Encontre os interceptos x e y do gráfico.
b. O gráfico possui simetria em relação aos eixos ou a origem?
c. Calcule o zero da função do denominador e marque com uma reta no gráfico.
d. Construa uma tabela de valores e verifique para quais valores a função é positiva e negativa.

TAREFA III: Construindo a noção intuitiva de limite a partir das funções racionais

Construindo o gráfico de funções racionais

1. Digite a seguinte função na caixa de entrada do software Geogebra: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$
a. Construa uma tabela para a função tomando valores para x próximos de 1, mas nunca igual a esse valor.
b. O que acontece com os valores de f(x) a medida em que tomamos x cada vez mais de 1?
2. Digite a seguinte função na caixa de entrada: $g(x) = \frac{3}{x-2}$
a. Construa uma tabela para a função tomando valores para x próximos da restrição do seu domínio.
b. O que acontece com os valores de f(x) a medida em que tomamos x cada vez mais próximo de sua restrição?
3. Digite a seguinte função na caixa de entrada: $h(x) = \frac{4x^2}{x^2+4}$
a. Construa uma tabela para a função tomando valores grandes para x..
b. O que acontece com os valores de f(x) a medida em que tomamos x cada vez maiores?
c. Marque com uma reta para qual valor de f(x) essa função está se aproximando

Referências:

SAFIER, Fred. Funções Racionais. In: SAFIER, Fred (org). **Pré-cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2011.p. 132-145

sobre o Geogebra. **Site da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo**. Instituto São Paulo Geogebra. Disponível em: < https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html >. Acesso em: 03 mar. 2023.

STEWART, James. Limites e Derivadas. In: STEWART, James (org.). **Cálculo**. Vol. 1. São Paulo: Cegange Learning, 2014. p. 75-91.

texto 1 - interface e ferramentas. **Site O Geogebra**. Disponível em: < https://www.ogeogebra.com.br/arquivos/01-interfaceeferramentas.pdf >. Acesso em: 03 mar. 2023.