

AS FRAÇÕES EQUIVALENTES NA OBRA MÉTODOS MODERNOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA DE CHARLES D'AUGUSTINE

EQUIVALENT FRACTIONS IN THE WORK MODERN METHODS FOR TEACHING MATHEMATICS BY CHARLES D'AUGUSTINE

Adriana Menegotto Nierri¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1888-9755>

Barbara Winiarski Diesel Novaes²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7763-7777>

Submetido: 24 de agosto de 2023

Aprovado: 22 de setembro de 2023

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo caracterizar uma proposta para ensinar frações equivalentes a partir do manual pedagógico “Métodos Modernos para o Ensino de Matemática” de Charles H. D’Augustine. A obra circulou no Paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna / Pós MMM e fez parte do referencial para formação de professores dos primeiros anos de escolarização neste estado. Numa perspectiva sócio-histórica, o referencial teórico-metodológico está ancorado em autores como Moraes, Bertini e Valente (2021) com a categoria de *matemática do ensino* e seus elementos de categorização: *sequência, significado, graduação, exercícios e problemas*; Valente (2007) acerca das produções escolares; Chartier (1990), Choppin (2004) e Silva (2005) sobre os manuais escolares. É possível inferir que o autor do manual pedagógico analisado, parte do conceito intuitivo sobre as frações equivalentes, propondo um trabalho bastante completo e diversificado por meio de regiões de polígonos, segmentos de reta, linhas e conjuntos determinados, conjuntos equipotentes e quadro de frações.

ABSTRACT/ RESUMEN/ RÉSUMÉ

The present work aimed to characterize a proposal to teach equivalent fractions based on the pedagogical manual “Modern Methods for Teaching Mathematics” by Charles H. D’Augustine. The work circulated in Paraná at the time of the Modern Mathematics Movement / Post MMM and was part of the reference for training teachers in the first years of schooling in this state. From a socio-historical perspective, the theoretical-methodological framework is anchored in authors such as Moraes, Bertini and Valente (2021) with the category of teaching mathematics and its categorization elements: sequence, meaning, graduation, exercises and problems; Valente (2007) about school productions; Chartier (1990), Choppin (2004) and Silva (2005) on school manuals. It is possible to infer that the author of the analyzed pedagogical manual starts from the intuitive concept of equivalent fractions, proposing a very complete and diversified work through regions of polygons, straight segments, lines and determinate sets, equipotent sets and fractions table.

¹ Mestranda do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas, da UFPR - Universidade Federal do Paraná. Graduada em Matemática na (UNIPAR). Graduada em Pedagogia pela (UNOPAR). Professora no Colégio Estadual Heitor Cavalcanti de Alencar Furtado Tupãssi, Paraná, Brasil. Avenida Memória, 357, Paraná, Brasil, CEP: 85945-000. E-mail: adriana.menegotto@yahoo.com.br.

² Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR). Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, Toledo, Paraná, Brasil. Rua Cristo Rei, 19, UTFPR, Vila Becker, Toledo, Paraná, Brasil, CEP: 85902-490. E-mail: barbaraw@utfpr.edu.br.

Palavras-chave: História da educação matemática; Frações equivalentes; Movimento da Matemática Moderna.

Keywords: History of Mathematics Education; Equivalent fractions; Modern Mathematics Movement.

INTRODUÇÃO

No Brasil, as frações equivalentes geralmente são introduzidas no quinto ano do ensino fundamental e repetidas em anos subsequentes à medida que são introduzidos novos conceitos. Nos Estados Unidos, acontece algo parecido e segundo Kamii e Clark (1995) apesar dessas repetições, os resultados são decepcionantes e alguma coisa está claramente errada na maneira como as frações equivalentes são ensinadas.

De acordo com Kamii e Clark (1995, p. 367 e 369) “pesquisadores geralmente consideram o conhecimento de frações equivalentes como a capacidade de chamar o mesmo número por nomes diferentes, a capacidade de ignorar ou imaginar linhas divisórias e/ou uma manifestação de pensamento flexível”. Por outro lado, Jean Piaget “fez uma distinção entre o aspecto figurativo do conhecimento (baseado em formas, que são observáveis) e o aspecto operatório (baseado em relacionamentos, que não são observáveis)” (KAMII; CLARK, 1995, p. 369). Kamii e Clark (1995), trazem um exemplo da metade de um retângulo, que pode ser retangular ou triangular. Do ponto de vista figurativo a metade retangular parece maior que a metade triangular, mas, do ponto de vista operativo nos permite deduzir que as duas metades são iguais. Complementa que em relação às frações equivalentes há dois aspectos relacionados ao pensamento operativo, o pensamento multiplicativo e a conservação do todo e das partes.

No contexto americano, o estudo de Kamii e Clark (1995) chega à conclusão que a maneira com que os professores ensinam as frações equivalentes de forma figurativa com imagens e manipulativos, assim como palavras faladas, símbolos e algoritmos não favorece a compreensão. Ademais, ao dizer que certas frações são equivalentes, privam a criança de pensar muito sobre isso, inventar. Outro aspecto que destacam é que se ensina primeiro frações próprias e depois frações impróprias e números mistos, mas que tudo isso deveria ser desenvolvido em conjunto para que as crianças pensem nas partes e no todo ao mesmo tempo. Ao final sugerem que mais pesquisas sejam desenvolvidas para determinar quando ensinar frações equivalentes e como?

A História da educação matemática procura contribuir na busca de respostas a essa complexa pergunta, pois, tratados epistemologicamente, os velhos problemas do ensino de frações equivalentes podem ser compreendidos a partir de uma reflexão de André Chervel (1990), ao indagar “por que a escola ensina o que ensina?” (p. 190). Visto historicamente, tais problemas podem contribuir para desnaturalizar a velha representação da pedagogia como

lubrificante e responsável por adaptar conteúdo de uma ciência de referência (Matemática) para torná-los ensináveis (CHERVEL, 1990).

Partindo dessas questões e problematizações do presente o trabalho de mestrado em andamento intitulado “Caracterização de propostas para ensinar frações equivalentes nos primeiros anos de escolarização (Paraná, 1970 – 1980)”, tem por objetivo caracterizar propostas para ensinar frações equivalentes nos manuais pedagógicos em circulação no estado do Paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna (1970 – 1980)³. Para esta comunicação objetivamos caracterizar a proposta para ensinar frações equivalentes presente no manual pedagógico “Métodos Modernos para o Ensino da Matemática” de Charles D’Augustine que circulou no Paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna e pós Movimento, desta forma contribuir para a compreensão de como foram se constituindo os saberes de referências para o ensino das frações equivalentes.

De acordo com Valente (2017, p. 31) “Os fatos históricos são constituídos a partir de traços, de rastros deixados no presente pelo passado”. Esses traços são constituídos através das interrogações do historiador. Valente (2007) ressalta que os manuais pedagógicos fazem parte das produções escolares, esses permitem ao historiador construir as representações dos fatos, a partir de suas interpretações.

A escolha do referido manual não foi feita de forma aleatória, “A prática, frequente, de uma amostra totalmente aleatória não pode conduzir, e não conduz efetivamente, a não ser a resultados frágeis, até mesmo caducos” (CHERVEL, 1990, p. 203 - 204). Há indícios da difusão e circulação do referido manual no Estado do Paraná por diferentes vias. Faz parte das referências bibliográficas: da coleção de livros didáticos “Ensino Moderno da Matemática” (MARTINS; YAREMTCHUK; ARRUDA, 1975), elaborada pelo Núcleo de Estudos e Difusão da Matemática (NEDEM) (NIERRI; BERTICELLI; NOVAES, 2022) para os primeiros anos de escolarização; em manuais pedagógicos destinados a professores de primeira a quarta série das escolas rurais e distritos (PARANÁ, 1979); em exemplar da revista Currículo (PARANÁ, 1977) e em módulos do projeto HAPRONT (COSTA, 2013). O manual que utilizamos para análise é uma reimpressão que data 1981 - verificamos que teve sete reimpressões - e possui carimbo do Colégio Francisco Carneiro Martins do município de Guarapuava do estado do Paraná.

Num momento em que o Movimento da Matemática Moderna (MMM) começou a ganhar força nos primeiros anos de escolarização a tradução em 1970 da obra publicada

³ O projeto de mestrado está sendo desenvolvido no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas (PPGECMTE), da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

inicialmente em 1968 em inglês seria imprescindível e urgente pois era necessário, segundo a tradutora Maria Lucia F. E. Peres, “um livro que explicasse aos professores já em exercício, bem como os alunos dos cursos normais, o que realmente constituía o movimento pedagógico que ficou conhecido como ‘Matemática Moderna’, apresentando-lhes seus aspectos mais importantes” (D’AUGUSTINE, 1976, p. IX).

De acordo com Santos (2020), o MMM no Brasil é fruto de movimentos internacionais, teve início no período pós segunda guerra, na década de 1950. Esse movimento foi caracterizado por mudanças no ensino de matemática. No Brasil esteve no cume de suas discussões entre as décadas de 1960 e 1980.

A modernização nacional, se deu através de discussões sobre o ensino da matemática, produção de materiais, realização de congressos, simpósios, e cursos de formação de professores (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021).

Conforme Moraes, Bertini e Valente (2021), este movimento teve como marco uma virada no sistema escolar brasileiro, liderado pelo Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), de São Paulo, que esteve sob a coordenação de Osvaldo Sangiorgi⁴. No Paraná esse Movimento foi liderado pelo NEDEM, que tinha como coordenador o professor Osny Antônio Dacol⁵ (PORTELA, 2009).

Para caracterizar a *matemática do ensino* de frações equivalentes, presente no manual pedagógico em estudo, mobilizamos os conceitos de saberes *a* ensinar e saberes *para* ensinar, os objetos teóricos de conhecimento, matemática *a* ensinar e matemática *para* ensinar, chegando à *matemática do ensino*. Para auxiliar nessa categorização utilizaremos os elementos *sequência, significado, graduação, exercícios e problemas* (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021). Essas escolhas serão detalhadas nos próximos tópicos.

MANUAL PEDAGÓGICO COMO MEIO DE TRANSMISSÃO DE CONHECIMENTO

O historiador desempenha o papel de um detetive, necessita do auxílio de teorias para construir os fatos históricos (DARNTON, 2014).

Na mesma vertente, o historiador da educação matemática, também tem por tarefa produzir fatos históricos. Para elaborar esses fatos utiliza-se do estudo de práticas da educação matemática de outros tempos. Uma das formas de se estudar essas práticas é pelo

⁴ Osvaldo Sangiorgi, nascido em 1921 no estado de São Paulo, foi professor de matemática, autor de diversos livros didáticos durante o Movimento da Matemática Moderna, fundador e coordenador do GEEM (MORAIS, BERTINI e VALENTE, 2021).

⁵ Osny Antônio Dacol, nascido em 1930, formado em matemática pela Universidade Federal do Paraná, um dos fundadores e coordenador do NEDEM (PORTELA, 2009).

questionamento das produções escolares. Fazem parte das produções escolares, dentre outros os livros didáticos, manuais pedagógicos, cadernos escolares do aluno e do professor, jornais, revistas, programas, diários de classe, boletins, provas escolares, relatórios, fotos e fontes orais. Constituem um *corpus* que permite ao pesquisador construir representações de como essas práticas podem ter acontecido, a partir da interpretação das fontes (VALENTE, 2007).

Conforme Choppin (2004), os manuais pedagógicos por muito tempo foram considerados o principal meio de transmissão de conhecimento e informações, percebendo assim os manuais como componentes da cultura escolar⁶ que traz em si finalidades econômicas, políticas, pedagógicas, sociais, entre outras.

Os manuais pedagógicos podem ser considerados como uma “representação social” (CHARTIER, 1990), pois são como “[...] instâncias de produção e circulação dos saberes”, que fundamentam o modelo de ensino que temos, sendo assim “a história dos manuais articulou-se à difusão mundial da escola e dos conhecimentos pedagógicos” (SILVA, 2005, p. 268).

De acordo com Oliveira (2015, p. 14), “tratar da circulação de um dado objeto de estudo não é tarefa fácil”. O autor não defende uma definição fechada/pronta/fixa de circulação, afirma que cada contexto pode trazer uma interpretação.

O historiador pode ouvir homens e mulheres de uma dada sociedade, mesmo não sendo através das entrevistas, mas pela análise de documentos produzidos por ela. Cada contexto permite interpretação da noção de circulação. Ademais, “para explorar o processo de difusão de algo é necessário identificar e reconstituir as dinâmicas de circulação” (OLIVEIRA, 2015, p.15).

Em termos de circulação, qual a importância de se analisar o manual pedagógico “Métodos Modernos para o Ensino de Matemática” (1976) de Charles H. D’Augustine? Conforme exposto na introdução há indícios de circulação e difusão desse manual no Estado do Paraná e dessa forma constitui fonte privilegiada para compreensão de propostas para ensinar frações equivalentes presentes na formação de professores para o ensino primário do Estado do Paraná de outros tempos.

CATEGORIAS PARA ANALISAR A MATEMÁTICA DO ENSINO DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES

⁶ A cultura escolar é compreendida como “um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos” (JULIA, 2001, p. 9).

Em 2017 o professor Wagner Valente juntamente com a professora Rita Hofstetter⁷ organizam o livro “Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores”, que foi um marco nas pesquisas desenvolvidas por integrantes do Ghemat Brasil, pois apresentava novos referenciais teóricos para compreender os saberes profissionais da docência dos professores que ensinam matemática em perspectiva sócio-histórica. Dentre os conceitos estavam os saberes *a ensinar* e os saberes *para ensinar*.

Conforme Hofstetter e Schneuwly (2017), os saberes formalizados estão no centro de suas reflexões, e através deles contextualizam seu papel nas profissões do ensino e da formação, definindo dois tipos de saberes: saberes *a ensinar* “[...] os saberes que são objetos do seu trabalho” e os saberes *para ensinar*, “[...] os saberes que são as ferramentas do seu trabalho” (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 131-132).

Mas, porque estudar as frações equivalentes em perspectiva histórica? Analisar historicamente como os saberes para ensinar as frações equivalente vêm sendo elaborados dentro da cultura escolar, possibilita caracterizar as mudanças ocorridas no ensino ao longo do tempo, e essa análise aponta “[...] elementos constituintes dos saberes elaborados historicamente pela cultura escolar” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 17).

No mesmo livro Valente (2017), a partir do referencial Suíço, construiu objetos teóricos de conhecimento (BORBA; VALDEMARIN, 2010) a matemática *a ensinar* e a matemática *para ensinar*.

A matemática *para ensinar*, refere-se “[...] à objetivação de um saber matemático” (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2021, p. 68), presente na formação profissional do professor que ensinará matemática, já a matemática *a ensinar* refere-se aos “saberes disciplinares” (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2021, p. 69), aquela ligada aos saberes objetivados, normatizados, disposta para o ensino.

Mas recentemente, no livro “A matemática no ensino de frações” Moraes, Bertini e Valente (2021) trazem uma nova hipótese teórica de pesquisa que articula a matemática *a ensinar* e a matemática *para ensinar*, à matemática do ensino. Considerada como um saber que resulta da produção histórica e da cultura escolar tem como centro as reflexões epistemológicas na qual a escola é uma instituição produtora de saberes, que ao longo do tempo produziu uma matemática para o ensino.

Para este estudo mobilizaremos o conceito *matemática do ensino*, pois essa “analisa processos e dinâmicas de constituição dos saberes escolares, da matemática presente na escola.

⁷ Coordenadora da *Equipe de Recherche em Histoire Sociale de l'Éducation – ERHISE* da Universidade de Genebra.

[...] Tal análise leva em consideração os aspectos envolvidos na formação de professores e no ensino ministrado numa dada época” (MORAIS, BERTINI, VALENTE, 2021, p. 17). Mais especificamente nos propomos a caracterizar uma matemática do ensino das frações equivalentes prescrita em manuais pedagógicos ao tempo do Movimento da Matemática Moderna.

Morais, Bertini e Valente (2021) consideram que a análise de livros e manuais pedagógicos de diferentes épocas possibilita caracterizar as mudanças que aconteceram na matemática do ensino mesmo que de forma indireta. Para auxiliar na caracterização da *matemática do ensino* os autores propõem quatro categorias de análise: *sequência*, *significado*, *gradação*, e *exercícios e problemas*.

Mas, o que se compreende pelo uso dessas categorias?

A *sequência* tem caráter histórico, muda de acordo com cada época pedagógica. É entendida como “o lugar ocupado pelas frações no conjunto dos temas da aritmética” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 18). Os autores consideram que *sequência* é a estruturação de uma dada rubrica escolar indicada nos livros didáticos e manuais pedagógicos, apresenta-se como uma ordem de temas, que será percorrida pelo professor, visando a aprendizagem do aluno.

O *significado* é compreendido pelo “[...] modo como o professor deverá se referir a um dado tema da matemática do ensino, de maneira a introduzi-la em suas aulas, tendo em vista contato do aluno com um novo assunto” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 18-19). Consideremos o significado dado as frações nos textos escolares, como o assunto frações é definido, considerando a ideia inicial transmitida ao aluno sobre o que é fração? Como se introduz um dado assunto da matemática para o aluno.

Para o termo *gradação* os autores fazem referência a “estruturação de uma dada rubrica escolar nos seus diferentes temas para o ensino”. Ela “está diretamente ligada a uma dada concepção de ensino e de aprendizagem de um dado assunto pelo aluno” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 19). Essa categoria de análise indica um cuidado ao iniciar o ensino de um dado tema, no caso do ensino de frações. É a progressão no ensino das frações, o passo-a-passo que deverá ser seguido ao se trabalhar com o aluno, são as orientações sobre os caminhos a serem trilhados para o ensino, a *gradação*.

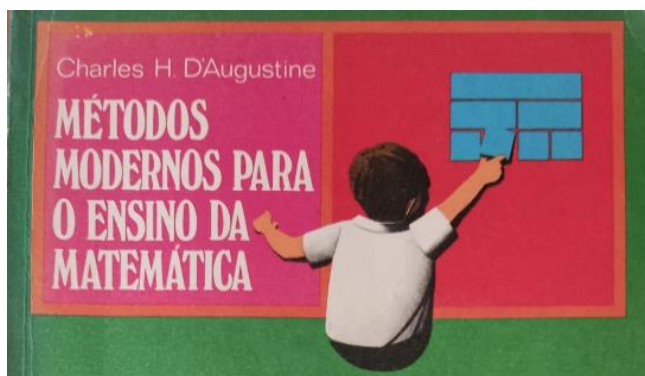
Por fim os *exercícios e problemas*, esses “[...] remetem as respostas esperadas pelos professores relativamente ao que ensinaram sobre frações para seus alunos (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021, p. 19). Esses são propostos para os alunos após ou durante a

realização do ensino, articulam-se com as escolhas do professor, os caminhos que foram trilhados para a realização do ensino, esses caminhos foram formados através da *sequência*, *significado* e *graduação*. Estas serão as quatro categorias que iremos mobilizar para caracterizar a proposta para ensinar as frações equivalentes no manual pedagógico Métodos Modernos para o ensino de matemática de Charles D’Augustine.

O MANUAL PEDAGÓGICO MÉTODOS MODERNOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

A obra “Métodos Modernos para o Ensino da Matemática”, foi lançada em 1968 nos Estados Unidos, tendo como título original “Multiple methods of teaching mathematics in the elementary school”, por Charles D’Augustine⁸, foi traduzida por Maria Lucia F. E. Peres e publicada pela editora Ao Livro Técnico S/A em 1970. A obra teve reimpressões nas décadas de 1970 e 1980, em 1976, 1979, 1981, 1982, 1984, 1985 e 1987. O manual⁹ analisado, como mencionado anteriormente, é uma reimpressão de 1981 e possui carimbo do Colégio Francisco Carneiro Martins do município de Guarapuava do estado do Paraná. Na ficha de controle de devolução da biblioteca há datas de empréstimo do ano de 1994. Já na capa (figura 1), observamos uma criança manipulando ativamente cartões retangulares que lembram um quadro de equivalência.

Figura 1 – “Métodos Modernos para o ensino da Matemática” – fragmento da capa



Fonte: D’Augustine (1981, capa)

No prefácio, D’Augustine (1981) esclarece que este livro destinou-se às escolas normais e aos cursos de aperfeiçoamento do magistério primário e que foi produzido dentro das

⁸ Charles H. D’Augustine (1932 - 2021), nascido em Orlando na Flórida – Estados Unidos, foi professor na Universidade de Ohio, mas também escrevia e ensinava na Faculdade de Educação, e anos depois, na Faculdade de Negócios. Para mais informações veja-se: <https://obituaries.neptunesociety.com/obituaries/plantation-fl/charles-daugustine-10481723>

⁹ O manual fazia parte do a arquivo pessoal da Professora Elenir Terezinha Paluch Soares e foi doado ao Ghemat Paraná em 20 de setembro de 2021.

tendências do movimento moderno que estava ocorrendo na educação primária, oferecendo aos professores oportunidades de adaptação às inovações que vinham ocorrendo no currículo.

Consta no prefácio da tradutora da edição brasileira, que todos os professores ouviam falar em Matemática Moderna e que tinham interesse em conhecer o que havia de novo para o ensino de matemática, mas muitos livros que se diziam da “Matemática Moderna”, na sua grande maioria apresentavam uma releitura de exercícios tradicionais, ilustrados de maneira diferente (PERES, In D’AUGUSTINE, 1981).

De acordo com a Introdução Histórica, presente no manual pedagógico em estudo, o termo “moderno” seria um nome errado para o atual programa de matemática da escola primária, no contexto dos Estados Unidos. A Matemática Moderna, deveria ser chamada de *matemática revolucionária*, “[...] porque a reforma do currículo contém muitas características que normalmente são associadas a uma revolução” (D’AUGUSTINE, 1981, p. 21).

Segundo D’Augustine (1981) as sementes para a modificação do currículo foram plantadas a pelo menos três décadas. O começo da revolução consistia em:

1. Informações contínuas sobre o modo pelo qual as crianças aprendiam.
2. Melhor conhecimento da estrutura básica da Matemática.
3. Tentativas bem sucedidas de unificar os conceitos matemáticos.
4. Reconhecimento de que a continuidade do ensino nas diferentes séries era o suficiente.
5. Reconhecimento de que o ensino da Aritmética era totalmente orientado para desenvolver habilidades de computação.
6. Reconhecimento de que a sequência no ensino da Matemática na escola primária era mais história do que lógica.
7. Reconhecimento de que o comércio e a indústria da sociedade contemporânea requerem maior competência em matemática.
8. Reconhecimento de que os conhecimentos e o preparo do professor primário são mais profundos do que no passado (D’AUGUSTINE, 1981, p. 21 – 22).

Diante do exposto, D’Augustine (1981) considerava que fazer mudanças no currículo não era fácil, existiam muitos empecilhos. Destacava que, os métodos indicados para formar e aperfeiçoar os professores atrapalhavam a reforma do currículo da escola primária. Alguns outros fatores eram professores próximos da aposentadoria, com defasagem de conteúdo, orgulhosos, leigos, e que não realizavam uma análise prévia do currículo, diretores que têm por objetivo agradar pais e colegas.

No contexto americano, com tantos desafios, houve a necessidade de criar um “Conselho Nacional de Professores de Matemática¹⁰”, que tinha por finalidade divulgar a “Nova” Matemática, promover pesquisas e inovar o currículo. Esse conselho trouxe estabilidade para a revolução, “[...] divulgando amplamente os resultados de pesquisas e

¹⁰ Em inglês *National Council of Teachers of Mathematics* que foi criado em 1920. Disponível em: <https://www.nctm.org/About/> acessado em 20 de março de 2023.

inovações surgidas, bem como fornecendo novas apreciações críticas de cada novo projeto de currículo” (D’AUGUSTINE, 1981, p. XXII).

Em 1957 foi criada a “National Science Foundation”, que tinha por função levantar fundos para formar professores, promover pesquisas sobre currículos, e manter projetos de currículo de matemática. Dentre os projetos que foram financiados estava o “Grupo de estudos de ensino de matemática”, *School Mathematics Study Group* - (SMSG).

Para D’Augustine (1981) o que faz a Matemática ser Moderna não é o conteúdo, o conteúdo em si não é moderno, salvo exceções. O que consiste na Matemática Moderna, é o programa que tem:

[...] uma estrutura que permite maior participação do aluno; é mais flexível; procura atender as diferenças individuais; dá maior ênfase a um trabalho sólido e unificado; exige melhor equilíbrio entre o aspecto computacional da Matemática; sua aplicação social e os aspectos criativos que ela encerra; dá maior ênfase ao significado dos conceitos e à aplicação, nos currículos, dos resultados de pesquisas sobre a aprendizagem realizadas no campo da Educação e da Psicologia (D’AUGUSTINE, 1981, p.1)

Com isso o autor explicava que não tinha pretensão de dizer que no currículo de matemática da escola primária, não se encontravam novas ideias. Citava tópicos como: desigualdade, representação simbólica de conjuntos, variáveis que foram inseridos no currículo com o objetivo de unificar e dar uma certa flexibilidade a ele. Podemos perceber que estes conteúdos eram parte inovadora do currículo em tempos da Matemática Moderna, também como destacam também Santos, França e Ramires (2022, p. 15).

Na análise dos manuais de Sanchez e Liberman (1969), Sangiorgi (1965) e Ferreira e Carvalho (s.d.), vemos indícios da matemática moderna, tais como: organização dos conteúdos de forma lógica, conteúdos relacionados pela teoria de conjuntos e baseado nas estruturas matemáticas; quanto ao saber fração, este vinha articulado a representações numéricas e pictóricas, as quais eram apresentadas, concomitantemente, para se desenvolver ideias a fim de gerar a compreensão e análise das relações entre as quantidades representadas pelos números fracionários.

Ao final de cada capítulo da obra de D’Augustine, há uma vasta lista de referências que sustentam teoricamente o que está sendo apresentado. Dentre as referências estão Edward L. Thorndike (1922), *School Mathematics Study Group* (1962; 1963), *National Council of Teachers of Mathematics* (1959; 1960; 1961; 1963).

Por meio da análise da obra como um todo, de suas finalidades e concepções podemos perceber que Charles D’Augustine estava na vanguarda do ideário do MMM o que ele chamou de Movimento Revolucionário.

MATEMÁTICA PARA ENSINAR FRAÇÕES EQUIVALENTES NA OBRA MÉTODOS MODERNOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

O ensino de frações no manual pedagógico “Métodos Modernos para o ensino da Matemática” de D’Augustine (1981), apresenta um rol de conteúdo para serem tratados no ensino primário. O ensino das frações tem início no capítulo 8. Na introdução desse capítulo o autor ressalta que o conceito de número fracionário é mais sofisticado do que o conceito de número natural, dessa maneira há necessidade de a criança ter mais maturidade e maior base matemática para estudá-lo.

A *sequência* da matemática do ensino de frações equivalentes no manual referido, se dá a partir de técnicas em repartir conjuntos contínuos, definição, uso da terminologia e representação simbólica, seguindo para a construção do conceito de frações equivalentes. Esse conceito antecede o ensino das operações com números fracionários. Dentro do conjunto dos temas da aritmética, o ensino de frações ordinais antecede o ensino das frações decimais.

Na busca de um *significado* inicial sobre as frações equivalentes para se trabalhar com o aluno, o manual apresenta que a ideia de número fracionário pode ser associada “1 - A partilha de um conjunto determinado; 2 - A razão das propriedades numéricas de dois conjuntos; 3 – Um número associado a partilha de um conjunto contínuo; 4 – Um número que representa o cociente de dois números naturais (sendo o divisor diferente de zero)” (D’AUGUSTINE, 1981, p. 144).

Nas primeiras séries do curso primário deveria ser dado ênfase a um conceito mais intuitivo de número fracionário por meio do trabalho com “[...] regiões de polígonos, segmentos de reta, linhas e conjuntos determinados” (D’AUGUSTINE, 1981, p. 145) além de “[...] desenvolver um conceito intuitivo de nomes equivalentes para o mesmo número fracionário, através do trabalho com regiões congruentes e segmentos congruentes” (D’AUGUSTINE, 1981, p. 145). Já nas séries mais avançadas seria dado “ênfase à extensão do conceito de número fracionário e frações equivalentes e ao desenvolvimento das operações” (D’AUGUSTINE, 1981, p.145), numa aprendizagem gradual.

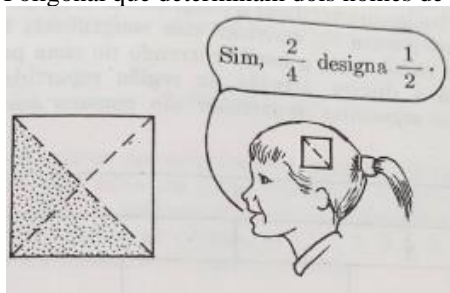
Para mostrar a ideia que um número fracionário tem muitos nomes equivalentes, o autor sugere que “[...] recorte uma região ou um dos segmentos repartidos, sobrepondo-a às demais regiões e segmentos, para verificar se são congruentes” (D’AUGUSTINE, 1981, p.148-149). Para esse experimento não usa o círculo, pois não facilita a divisão em partes congruentes pela criança, outros polígonos regulares como o quadrado e o hexágono podem ser divididos facilmente.

Logo após apresenta o conceito de números fracionários como sendo o cociente de dois números naturais, de modo que o divisor seja um número diferente de zero, ou seja, “[...] qualquer número que pode ter o nome $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais e $b \neq 0$ ” (D’AUGUSTINE, 1981, p. 146). Cabe ao professor estruturar situações que levem a criança a descobrir que um número fracionário tem muitos nomes.

A comparação entre subconjuntos das partes fracionárias em que o inteiro foi dividido possibilitará essa descoberta (Figura 2). Através de situações do tipo: “Maria tem dois quartos de uma barra de chocolate e João tem um meio da mesma barra. Quem tem mais?” (D’AUGUSTINE, 1981, p. 152 – 153). Esse trabalho também pode ser realizado através de regiões poligonais, onde um inteiro dividido por dois métodos pode representar a mesma área.

Observa-se que o quadrado (figura 2) foi dividido em partes iguais pelo uso das diagonais, formando triângulos congruentes e não em retângulos e quadrados menores. Seria uma tentativa de trabalhar com o “aspecto operatório” (KAMII, CLARK, 1995)?

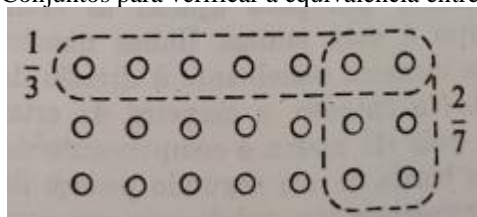
Figura 2 – Região Poligonal que determinam dois nomes de frações equivalentes



Fonte: D’Augustine (1981, p. 153)

Há exemplos de frações discretizáveis. Para verificar se dois nomes de fração são equivalentes, usando conjuntos, faz-se necessário ter um conjunto que possa ser repartido por esses denominadores. No caso $\frac{2}{7}$ e $\frac{1}{3}$ são equivalentes? O conjunto deveria conter 3 linhas e sete colunas com objetos (bolinhas), conforme Figura 3.

Figura 3 – Conjuntos para verificar a equivalência entre duas frações



Fonte: D’Augustine (1981, p. 153)

Dessa maneira facilita perceber que $\frac{1}{3}$ desse conjunto é sete, e $\frac{2}{7}$ desse conjunto é seis. São exemplos que possibilitam “[...] mostrar à criança por que se pode dizer se $\frac{a}{b}$ é igual, maior ou menor do que $\frac{c}{d}$, dependendo da relação entre a vezes d e b vezes c ” (D’AUGUSTINE, 1981, p. 154).

Na sequência é apresentada uma região retangular repartida em várias partes fracionárias (quadro de equivalências – vide figura 1), ressalta que este é um recurso¹¹ muito útil que leva a criança a descoberta das frações equivalentes.

Os quadros de equivalência constituem um saber profissional da docência de longa data. O artigo de Novaes, Berticelli e Pinto (2020), ao analisar os manuais pedagógicos de Campos (1933), Albuquerque (1958) e Porto (1967), aponta que, nos anos iniciais, há uma preocupação maior com o uso de materiais manipuláveis, já nas séries finais são introduzidos “[...] gráficos, diagramas, quadros de equivalência, oriundos da Pedagogia Científica, na vertente da Psicologia Experimental, ocorrem transformações nos saberes para ensinar frações, marcando em tempos de ensino renovado, a transição do concreto manipulado ao concreto pensado” (NOVAES; BERTICELLI; PINTO, 2020, p. 1). São propostas presentes nos manuais pedagógicos de Irene de Albuquerque e Rizza de Araújo Porto, manuais esses que fazem referência ao Movimento da Matemática Moderna.

No artigo de Santos, França e Ramires (2022), “Saberes de referência para a docência mobilizados com um dispositivo didático para o ensino de fração”, as autoras discutem, a partir de um dispositivo didático¹², saberes de referência que foram produzidos para ensinar fração. Dentre os dispositivos didáticos estão presentes os quadros de frações¹³, que “Rizza Porto, propõe trabalhar o material para ensinar o conceito de frações equivalentes” (SANTOS; FRANÇA; RAMIRES, 2022, p. 13).

Conforme observado em manuais de autores adeptos da pedagogia intuitiva, os quadros de frações eram utilizados para mobilizar “saberes relacionados às figuras para disparar, por meio da observação, da compreensão da relação entre grandezas e também da ideia de contagem das partes (fracionárias)” (SANTOS; FRANÇA; RAMIRES, 2022, p. 20). Dentro do movimento da Escola Nova, que também está o Movimento da Matemática Moderna, “[...] o dispositivo que analisamos passa de um material observável para outro manipulável, seguindo os preceitos do período escolanovista” (SANTOS; FRANÇA; RAMIRES, 2022, p. 20).

¹¹ O termo recurso muito útil, são palavras do autor.

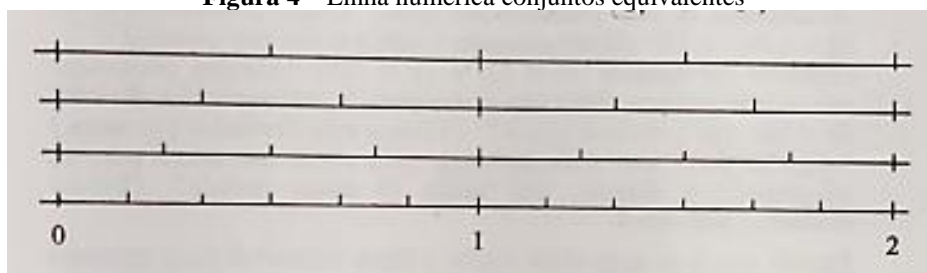
¹² A palavra dispositivo didático faz referência aos instrumento, artifício, artefato, material didático, ferramental (SANTOS, FRANÇA, RAMIRES, 2022).

¹³ Estamos entendendo quadro de equivalência e quadro de frações como sinônimos.

A partir da pesquisa, as autoras constataram que esse dispositivo didático, foi utilizado para tratar de diferentes saberes inerentes às frações. “Esteve articulado ao ensino de partes do todo, operações entre frações, relação entre grandezas, relação entre número fracionário e número decimal, ensino das classes de equivalência, e outros saberes a ensinar” (SANTOS; FRANÇA; RAMIRES, 2022, p. 20).

D’Augustine (1981), afirma que outro recurso muito útil para a descoberta das frações equivalentes, é o uso da linha numérica¹⁴ (Figura 4). Essas deverão ser divididas em partes iguais de maneira semelhante ao quadro de equivalência. Para fazer uso desse recurso, a criança marca o comprimento de uma divisão fracionária em outro pedaço de papel e verifica se “[...] outras linhas numéricas tem subdivisão que correspondem àquele comprimento” (D’AUGUSTINE, 1981, p. 154). O autor trás o significado número para a fração equivalente associado a medida na reta numérica.

Figura 4 – Linha numérica conjuntos equivalentes



Fonte: D’Augustine (1981, p. 155)

Usando a linha numérica, a criança pode descobrir classes de conjuntos de frações equivalentes como: “ $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}\}$, $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\}$, $\{\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}\}$, $\{\frac{4}{8}, \frac{3}{6}\}$, $\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}\}$, $\{\frac{5}{3}, \frac{10}{6}\}$, $\{\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{12}{6}\}$ ” (D’AUGUSTINE, 1981, p. 155). Os exemplos utilizados pelo autor envolvem frações próprias e frações impróprias.

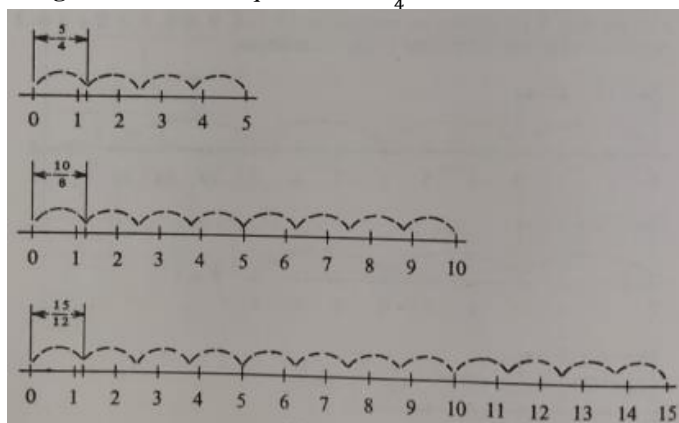
Para elaborar o conceito de frações equivalentes usando a linha numérica, o manual propõe que anteriormente se trabalhe o conceito de cocientes de números naturais, para começar a desenvolver a ideia de expressões de divisão equivalentes. Por exemplo: $12 \div 4$, $9 \div 3$, $6 \div 2$, $3 \div 1$.

Partindo desse exemplo o professor pode instigar os alunos a citarem outros nomes que representam três unidades, progredindo para exemplos matemáticos de números fracionários, até se estender a frações equivalentes representadas na linha numérica por meio de “saltos”.

¹⁴ A tradução de *Number line* é reta numérica. O manual apresenta a reta numérica com a escrita linha numérica, acreditamos que possa ser um equívoco de tradução do inglês para o português.

Cada “salto” significa a frações sendo multiplicada pelo mesmo número inteiro no numerados e denominador, duas vezes, três, vezes e assim por diante, conforme descrito na Figura 5.

Figura 5 – Nomes equivalentes a $\frac{5}{4}$, usando a reta numerada



Fonte: D’Augustine (1981, p. 156)

Mas, para o autor, este entendimento facilita pensar na fração como medida, $\frac{5}{4}$ como $5 \times \frac{1}{4}$. Por exemplo.

Nas primeiras experiências com números fracionários, costuma-se pedir a criança que determine frações equivalentes pela comparação entre duas regiões poligonais repartidas. Quando se considera que $\frac{a}{b}$ representa $a \times \frac{1}{b}$ numa linha numérica, será importante para a criança dividir primeiro a parte relativa a $\frac{1}{b}$ e então repartir esse tipo de divisão (D’AUGUSTINE, 1981, p. 156 – 157).

Destacamos que houve preocupação com o significado dado às frações, assim como na construção do conceito de frações equivalentes.

Para a construção do significado dado às frações equivalentes, podemos identificar uma graduação, nessa graduação o ensino percorreu as etapas: regiões e segmentos repartidos sobrepondo-a às demais regiões para verificar a congruência, segmentos e polígono dividido por métodos diferentes produzem a mesma área, relação de equivalência em subconjuntos equipotentes, quadro de equivalência, linha numerada.

Conforme D’Augustine (1981), todo número fracionário pode ser escrito por uma fração equivalente, e que anterior ao MMM, apenas frações reduzidas à *expressões mais simples* eram aceitas como corretas ao responder um problema.

O autor considera que a fração reduzida à *expressão mais simples*, é mais adequada por exemplo numa operação de multiplicação, mas, a “[...] fração escolhida para expressar a

resposta de um problema depende do conteúdo do problema, bem como dos conceitos para os quais os alunos estão sendo preparados” (D’AUGUSTINE, 1981, p. 156).

Se o aluno estiver sendo preparado para a notação decimal a fração $\frac{4}{10}$ deve ser a resposta esperada ao invés de $\frac{2}{5}$, pois quando o aluno estudar a precisão de medidas, perceberá que a medida $\frac{4}{10}$ foi feita comparada a $\frac{1}{10}$ do centímetro, e que a fração $\frac{2}{5}$ do centímetro, poderia nos enganar quanto a precisão da medida. Assim como se quiser utilizar a ideia $\frac{1}{3}$ com relação à dúzia, a fração $\frac{4}{12}$ transmite maior significado (D’AUGUSTINE, 1981).

O autor afirma que, ao se trabalhar com as frações equivalentes, mesmo que se ensine ao aluno que podemos encontrar muitos nomes para o número fracionário, deve-se sempre buscar pelo nome mais apropriado. Nesse contexto o significado dado a escrita da fração é aquele que melhor representa o que foi interrogado, dentro da situação problema.

Os exercícios e problemas são apresentados no final do capítulo referente ao ensino das frações equivalentes, num total de nove atividades. As atividades são bem diversificadas e buscam verificar através de polígonos que duas frações podem ser equivalentes, conjuntos equipotentes também geram frações equivalentes, a equivalência de frações a partir de material concreto (chocolate), e em diferentes exercícios solicita o uso da linha numérica.

A proposta apresentada para os exercícios e problemas, articula-se com os caminhos que foram trilhados para o ensino, uma retomada dos exemplos dados com mudanças no número fracionário, seguindo a mesma graduação.

CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo caracterizar a matemática do ensino de frações equivalentes presente no manual pedagógico “Métodos Modernos para o Ensino de Matemática” (1981) de autoria de Charles H. D’Augustine. Para tal, buscou-se identificar no referido livro elementos como: *seqüência, significado, graduação, exercícios e problemas* (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2021).

Para tanto, utilizou-se um estudo minucioso do capítulo 8, em que é abordado “Como ensinar os números fracionários” dentre eles, consta o ensino das frações equivalentes. Buscou-se examinar a proposta presente neste material para o ensino das frações equivalentes, e categorizar conforme os elementos já mencionados.

Para nossa análise, a matemática do ensino de frações equivalentes, foi considerada como um saber resultante da cultura escolar, que produz uma matemática para o ensino, de

acordo com a vaga pedagógica em questão. Nosso trabalho faz referência ao Movimento da Matemática Moderna.

Conforme a Introdução Histórica presente no manual pedagógico em estudo, o Movimento Moderno trouxe uma revolução na reforma do currículo, entendemos que essa revolução aconteceu em função da forma de ensinar, novos métodos, novas práticas pedagógicas, uma preocupação no entendimento do conteúdo por parte da criança, onde o ensino dava maior ênfase ao significado dos conceitos e sua aplicação.

Em síntese, os resultados revelam que o autor do manual pedagógico em questão se apropriou das ideias presentes na Matemática Moderna. Podemos identificar o uso de símbolos como diferenças e igualdade, o uso de conjuntos para identificar frações equivalentes, linhas numéricas. Quanto a linguagem utilizada julgamos de fácil interpretação. Trouxe com clareza o conceito de números fracionário, seguindo para a construção do conceito de frações equivalentes. Percebemos que o autor mantém práticas de movimentos anteriores com o uso dos quadros de equivalência, agora associados as classes de equivalência.

As frações equivalentes compõem um dos primeiros assuntos tratados no capítulo “Como Ensinar os Números Fracionários”. A sequência do ensino das frações equivalentes antecede o ensino de número misto, a comparação de frações e as operações com frações. Dentro do conjunto dos temas da aritmética, o lugar ocupado pelas frações no conjunto de temas, antecede o ensino dos sistemas de numeração, notação decimal, razão e porcentagem. Sendo assim, na sequência estabelecida pelo autor, o ensino das frações é o ponto de partida, uma primeira representação para a construção do conjunto dos números racionais.

Os caminhos trilhados pelo autor para a graduação parte de modelos de áreas com recortes e comparação de partes congruentes, como por exemplo um círculo dividido em duas partes e em quatro partes, para mostrar que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Seguido de modelos com contadores discretos. Com o auxílio de um quadro de frações, a criança manipula um pedaço de papel para descobrir segmentos congruentes. O uso da linha numerada dividida em segmentos congruentes realiza comparações para verificar se outras linhas numéricas têm subdivisões que correspondem a aquele segmento, chegando ao conjunto das classes de frações equivalentes.

O autor indica que seja dado ênfase no conceito e trabalha com diferentes significados das frações equivalentes de forma gradual, iniciando com a parte-todo. Pontua que o significado dado a fração equivalente é aquele que melhor representa o que foi interrogado dentro da situação problema. Por exemplo, trabalha o significado de número como medida da linha numérica.

Os exercícios e problemas são uma retomada de conteúdo para verificar os conhecimentos adquiridos sobre as frações equivalentes. Esses são do tipo: Demostre que, imagine, ilustre, justifique, explique.

Charles D'Augustine demonstra um vasto conhecimento sobre a “matemática do ensino” articulando saberes de referência para ensinar as frações equivalentes, incorporando elementos do “Movimento revolucionário”, mas mantendo práticas de períodos anteriores.

REFERÊNCIAS

BERTINI, Luciane de Fatima; MORAIS, Rosilda dos Santos; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: novos estudos para a formação de professores**. 1.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

BORBA, Siomara; VALDEMARIN, Vera Teresa. A construção Teórica do Real: uma questão para a produção do conhecimento em educação. **Currículo sem Fronteiras**, v.10, .n.2, pp. 23-37, jul/dez. 2010.

CHARTIER, Roger. **História Cultural: entre práticas e representações**. Tradução Maria Manuela Galhardo. Ed. Bertrand Brasil. Rio de Janeiro, RJ. 1990.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**; v.2, p. 177-229. 1990.

CHOPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**. São Paulo, USP, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004.

COSTA, Reginaldo Rodrigues da. **A capacitação e aperfeiçoamento dos professores que ensinavam matemática no Estado do paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna – 1961 a 1982**. 2013. 212f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2013.

DARNTON, Robert. **Poesia e Política: redes de comunicação na Paris do século XVIII**. Tradutor: FIGUEREDO, Rubens. 1 ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2014.

D'AUGUSTINE, Charles H. **Métodos Modernos para o Ensino de Matemática**. Tradutora: PERES, Maria Lucia F.E. 4 ed. Rio de Janeiro: Ao livro Técnico S.A., 1981.

JULIA, Dominique. A. Cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**. n.1, p. 9-43, Jan/jun, 2001. Disponível em: <https://repositorio.unifesp.br/handle/11600/39195>. Acesso em: 09 ago. 2023.

KAMII, Constance; CLARK, Faye B. *Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications*. **Journal of Mathematical**. BEHAVIOR 14, p. 365-378. 1995.

MARTINS, Clélia Tavares; YAREMTCHUCK, Gliquéria; ARRUDA, Henrieta Dyminski. **Ensino moderno da matemática**, vol. IV. São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1975. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219789>. Acesso em: 09 ago. 2023.

MORAIS, Rosilda dos Santos; BERTINI, Luciane de Fatima; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A Matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC**. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2021.

NIERRI, Adriana Menegotto; BERTICELLI, Danilene Gullich Donin; NOVAES, Barbara Winiarski Diesel. Frações equivalentes na reta numérica: a aritmética moderna nos livros do NEDEM. In **Anais do XX Seminário Temático Internacional história da produção curricular em matemática: Saberes para o ensino e formação de professores**. v.1, n.1, p. 1-19, Osasco, SP, maio., 2022. Disponível em: <https://anais.ghemat-brasil.com.br/index.php/STI/article/view/155>. Acesso em: 17 ago. 2023.

NOVAES, Barbara Winiarski Diesel; BERTICELLI, Danilene Gullich Donin; PINTO, Neuza Bertoni. Transformações nos saberes para ensinar frações no curso primário relacionadas ao uso de materiais escolares (1930-1970). In: **Anais Do ENAPHEM – Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática**, n. 5, p. 1-5; 2020. Disponível em <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/11150>. Acesso em: 17 ago. 2023.

OLIVEIRA, Marcus Aldenison. **Circulação**. 1ª edição. São Paulo: Livraria da Física, 2018.

PARANÁ, CETEPAR. **Sugestões de atividades para professores de 1ª a 4ª séries**. Curitiba, 1979.

PARANÁ, **Revista Currículo n° 24** (Currículo do Estado do Paraná), 1977.

PORTELA, Mariliza Simonete. **Práticas de matemática moderna na formação de normalistas no instituto de educação do Paraná na década de 1970**. 137f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2009.

SANTOS, Edilene Simões Costa dos; FRANÇA, Denise Medina; RAMIRES, Késia. Saberes de referência para o docência mobilizados com um dispositivo didático para o ensino de frações. **Centro de Ciências da Educação**, Florianópolis, v.40, n. 2, p. 01-23, Abr./jun., 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/242794>. Acesso em: 17 ago. 2023.

SILVA, Vivian Batista. Saberes em viagem nos manuais pedagógicos: construções da escola em Portugal e no Brasil (1870-1970). **Brasileira de Educação**, v. 12, n. 35, p. 268-277. Mai/ago., 2007. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/5bKjDbCbM4CYtLWv5zmb79K/?format=pdf>. Acesso em: 17 ago. 2023.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da educação matemática: interrogações metodológicas. **Revista Eletrônica da Educação Matemática**. V.2.2, p.28-49. 2007.

Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160378>. Acesso em: 17 ago. 2023.