ACERVO
BOLETIM DO CENTRO DE DOCUMENTAÇÃO DO GHEMAT-SP

UM ESTUDO SOBRE PROPORCIONALIDADE A PARTIR DAS ESCALAS E USO DAS DUAS RÉGUAS PARA CÁLCULO DE WILLIAM OUGHTRED

A STUDY ON PROPORTIONALITY BASED ON SCALES AND THE USE OF TWO RULERS FOR CALCULATION BY WILLIAM OUGHTRED

Ana Carolina Costa Pereira[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3819-2381

Verusca Batista Alves[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9884-679X

Amanda Cardoso Benício de Lima[3]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3738-4445

Submetido: 13 de julho de 2024 **Aprovado:** 19 de março de 2025

RESUMO

Na formação inicial de professores que ensinam Matemática, a articulação com a história da matemática tem sido cada vez mais considerada. Nesse sentido, a pesquisa concentra-se na perspectiva da Interface entre História Ensino de Matemática (IHEM), a partir do documento histórico *The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment* (1639) e das réguas de cálculo inseridas nesse tratado, como recursos potencialmente didáticos para o estudo de temas como a proporcionalidade. Desse modo, a pesquisa visa discutir como se afigura o movimento do pensamento na formação/reformulação do conceito de proporcionalidade de licenciandos dos cursos de Matemática e de Pedagogia, da Universidade Estadual do Ceará (UECE), partir de um

ABSTRACT/ RESUMEN/ RÉSUMÉ

In the initial training of teachers who instruct in Mathematics, the integration of the history of mathematics has increasingly been recognized as essential. In this regard, the research focuses on the interface between the History and Teaching of Mathematics (IHEM), using the historical document The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment (1639) and the calculation rulers introduced in this treatise as potentially didactic tools for exploring topics such as proportionality. The study aims to investigate the development and reformulation of the concept of proportionality among undergraduate students in Mathematics and Pedagogy programs at the State University of Ceará (UECE), through a university extension course centered on

[1] Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2001), mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2005), doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2010) e pós-doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Ainda atua como docente Adjunta da Universidade Estadual do Ceará e líder do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuou principalmente nos seguintes temas: formação de professores de matemática e interface entre história e ensino de matemática.

[2] Doutoranda em Educação pela Universidade Estadual do Ceará (UECE), possui mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (2019) e graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (2017). Faz parte da diretoria da Sociedade Brasileira de Educação Matemática Regional Ceará (SBEM-CE) (2022-2025). Também, é membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) e do grupo editorial do Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (BOCEHM) e da Revista Cearense de Educação Matemática (RCeEM). Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em História de Matemática, atuando principalmente na formação inicial e continuada de professores de Matemática, com foco na interface entre história e ensino de Matemática.

[3] Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE) e membro do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Desenvolve projeto na área da Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Fontes Históricas, Instrumentos Matemáticos do Século XVII, Interface entre História e Ensino da Matemática e Formação do Professor de Matemática.

curso de extensão universitária, que teve como principal objeto articulador as Duas Réguas para Cálculo de William Oughtred. Para tanto, a pesquisa de cunho qualitativo, utilizou-se das estratégias bibliográficas e documentais e para análise dos dados, baseou-se na Análise de Conteúdo, sendo que para a apresentação, optou-se pela descrição dos achados. Durante a execução da atividade analisada, os resultados apontam que licenciandos consideravam o conceito de proporcionalidade relacionado unicamente a ideia de fração. A partir da atividade, considera-se que o movimento de manusear o instrumento reconstruído e estudar o tratado histórico, possibilitou aos participantes conhecerem outras perspectivas a respeito da proporcionalidade, atribuindo novos significados aos conhecimentos previamente estabelecidos.
Palavras-chave: Formação de professores que ensinam Matemática; Proporcionalidade; Instrumentos Matemáticos.

William Oughtred's Two Rulers for Calculation. A qualitative approach was employed, utilizing bibliographic and documentary research strategies. For data analysis, Content Analysis was applied, and the findings are presented descriptively. The results indicate that, prior to the activity, the students primarily associated the concept of proportionality with the idea of fractions. However, the hands-on experience of manipulating the reconstructed instrument and studying the historical treatise allowed the participants to explore alternative perspectives on proportionality, thereby reinterpreting and expanding their previously established knowledge.
Keywords: Training of teachers who teach Mathematics; Proportionality; Mathematical Instruments.

1. Introdução

A matemática[4] enquanto área autônoma, conforme se concebe na ciência do século XXI, teve seus primeiros moldes a partir dos séculos XVIII e XIX, quando os conhecimentos deixaram de ser concebidos pelo pensamento aristotélico e surgiram as especialidades (SAITO, 2015). Disso, nascem as subáreas, que, no caso da matemática, tem-se por exemplo, a aritmética, a álgebra, a geometria, a trigonometria, dentre outras diversas.

Levando em consideração o ensino de Matemática, esse também de algum modo, foi sendo modificado ao longo do tempo por várias influências, sendo uma delas a forma de se compreender a própria ciência contemporânea. No entanto, a maneira como o ensino de Matemática se apresenta, por vezes, “[...] pode promover nos estudantes a construção de uma visão de quão grande ela é, e de que sempre foi assim, repleta de segmentos que se unem para formar um só campo [...]” (BATISTA; PEREIRA, 2023, p. 2). Esse pensamento ainda pode reforçar a ideia equivocada de que os subcampos da matemática não têm conexão entre seus conhecimentos e entre outros campos.

A história da matemática nos revela que este tipo de pensamento tem bases epistemológicas e segue uma visão progressista e linear do conhecimento. Porém, conforme Saito (2015, p. 242) a história da matemática “tem renovado seus pressupostos e proposto compreender a natureza da matemática e do conhecimento matemático por meio de seu

[4] Utiliza-se a grafia matemática para referir-se a área de conhecimento e, Matemática, quando trata-se da disciplinar escolar. Essa ação tem se justificado na perspectiva de identificação sobre qual matemática que se refere e evitando-se anacronismos baseados numa historiografia atualizada (Saito, 2015).

processo de construção histórica, avançando além da própria caracterização formal da ciência e da matemática Moderna".

Nesse sentido, compreende-se que o professor, dentre suas várias funções didáticas e pedagógicas, é o responsável pela orientação dos pensamentos de como se concebe área que norteia a disciplina que leciona. E, para isso, a própria formação inicial dele precisa estar orientada sobre bases que possam fornecer a ele elementos possíveis de serem inseridos em sua futura ação docente.

Com isso, pesquisas no âmbito da educação matemática tem se aproximado cada vez mais da história da matemática, buscando por essa atualização/complementação da formação desses professores que ensinam Matemática. Uma delas, é a Interface entre História e Ensino de Matemática (IHEM) de Saito e Dias (2013) e Pereira e Saito (2019), que tem sido destacada em estudos cuja proposta objetiva a significação e ressignificação de conhecimentos matemáticos de professores em formação inicial ou continuada (ALVES, 2024a, 2019).

Um desses conhecimentos que têm sido considerados nas pesquisas com a IHEM, é a temática da proporcionalidade e o pensamento proporcional. No que diz respeito a educação básica, o conteúdo de razão e proporção perpassa por diferentes níveis fazendo parte de assuntos nas mais diversas subáreas da matemática, tais como aritmética, álgebra, trigonometria dentre outras e, assim como outros conceitos matemáticos como a multiplicação e a divisão, são fundamentais para o entendimento de outros conteúdos matemáticos. No entanto, conforme explica Lazzaretti (2022, p. 20) em seu estudo sobre a razão e proporção, ainda que seja uma temática simples,

> a matemática vista em sala de aula parece, por vezes, perder o encanto, quando tudo se torna apenas mais um tópico a ser trabalhado, à medida que os alunos já estão cansados de tentar entender determinados conteúdos matemáticos e optam apenas por decorar fórmulas e técnicas sem pensar no que estão fazendo.

Dessa forma, na formação do professor que ensina Matemática, é necessário haver elementos que o possibilite discutir temas como a proporcionalidade e o pensamento proporcional, de diferentes perspectivas e modos.

Sendo assim, a interface, que é apresentada na seção dois desse escrito, tem como documento principal na pesquisa as réguas para cálculo do século XVII nomeadas como *Staffe*[5] *e Transversarie*, contidas no tratado *The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment*

[5] Preserva-se a grafia do período no sentido de se evitar anacronismos e manter a originalidade.

(1639) de autoria do clérigo inglês William Oughtred (1574-1660)[6]. Além disso, tal tipo de estudo não visa sobrepor temas históricos as questões atuais da educação, mas considera que esses recursos históricos, por meio do contexto epistêmico de fabricação e uso, dão significado aos conhecimentos matemáticos explorados.

Em vista disso, teve-se como questão norteadora – Como os conhecimentos sobre proporcionalidade e o pensamento proporcional são mobilizados em uma atividade de manuseio das réguas *Staffe* e *Transversarie*, por licenciandos dos cursos de Matemática e de Pedagogia da Universidade Estadual do Ceará (UECE)?

Assim, teve-se o objetivo de discutir como se afigura o movimento do pensamento na formação/reformulação do conceito de proporcionalidade de licenciandos dos cursos de Matemática e de Pedagogia, da Universidade Estadual do Ceará (UECE), a partir de um curso de extensão universitária, na qual o principal objeto articulador foram as Duas Réguas para Cálculo de William Oughtred.

O artigo divide-se em sete seções, sendo a primeira esta introdução, em que se apresentam a justificativa, o problema e objetivo do estudo. Na seção dois, explica-se a respeito da Interface entre História e Ensino de Matemática (IHEM) considerando definição e elementos associados. Já a terceira seção apresenta sobre os documentos históricos da pesquisa, a saber, as réguas de cálculo e os tratados de William Oughtred, considerados no contexto da IHEM. Na quarta seção, delineia-se a respeito do percurso metodológico adotado na investigação. A seção cinco, mostra sobre a estrutura e elementos pertinentes ao curso de extensão universitária planejado e aplicado enquanto que, na sexta seção discute os resultados de uma das atividades executadas durante o curso. Por fim, a seção sete é destinada as reflexões finais do escrito.

2. Interface entre História e Ensino de Matemática (IHEM)

Das articulações entre a história da matemática e a educação matemática, a Interface entre a História e o Ensino de Matemática (IHEM) tem se caracterizado principalmente pelo tipo de historiografia[7] que considera o modo como se realiza o tratamento e estudo das fontes. A IHEM trata da "[...] constituição de um conjunto de ações e produções que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático para elaborar

[6] William Oughtred (1574-1660), inglês, foi um ministro anglicano e estudioso das matemáticas durante os séculos XVI e XVII, que, assim como outros, fizeram parte de um período em que os instrumentos matemáticos estavam em grande disseminação e as preocupações com o letramento matemático recebiam destaque (ALVES, 2019).

[7] Por historiografia, Saito (2015, p. 23) define-se como "a arte de escrever a história e, dessa maneira, trata dos critérios da 'escrita da história'". No caso da IHEM, ela considera a perspectiva historiográfica atualizada. Para mais sobre as historiografias recomenda-se ver Saito (2015) e Beltran, Saito e Trindade (2014).

atividades didáticas que busquem articular história e ensino de matemática" (SAITO; DIAS, 2013, p. 92).

Nesse sentido, o principal objetivo da interface está na construção de significados e ressignificados de conhecimentos matemáticos considerando que:

> A significação porque se considera que a Licenciatura em Matemática (e até mesmo sua formação na educação básica) pode não ter sido suficientemente aproveitada por este professor. E, a ressignificação, no sentido de fornecer uma nova perspectiva sobre conhecimentos já adquiridos e enraizados segundo outros métodos de ensino, como por exemplo, conhecimentos que foram memorizados, mas que provavelmente não se atribuiu um significado a eles (ALVES, 2024b, p. 7).

Desse modo, estudos com a IHEM tem privilegiado a formação de professores de Matemática, seja ela em aspecto inicial ou continuada, e, ainda são poucos os estudos que se direcionam a educação básica (ALVES, 2024a).

É preciso destacar que a IHEM não pode ser considerada uma metodologia ou teoria, ela é um posicionamento na pesquisa que articula elementos entre a história da matemática e a educação matemática, e pode alinhar-se a diferentes metodologias de pesquisa e de ensino, que conversem com suas orientações.

Além disso, não está dividida em etapas, mas orienta as ações mediante uma organização que parte daquilo que a IHEM chama de diálogo entre o historiador das ciências (ou da matemática) com o educador matemático. Esse diálogo é o primeiro ponto da IHEM, que considera articular duas áreas de conhecimento a partir de seus profissionais, que direcionam seus interesses comuns a cada um, num sentido de aproximar-se, fazendo emergir um recurso histórico que pode ser interessante para ambos.

Assim, o historiador, considerando aquilo que é importante no viés histórico e o educador, considerando aquilo que para ele é importante no âmbito educacional, passam a relacionar-se em sentido comum, sem sobrepor questões históricas as didáticas ou vice-versa, com o objetivo de compreender sobre o recurso de interesse.

Dentre os recursos que podem emergir desse diálogo, estão diversos tipos de fontes históricas tais como "um texto ou excerto de um texto, ou ainda um instrumento, um monumento, uma foto, uma imagem, uma figura, um vídeo, entre muitos outros" (PEREIRA; SAITO, 2019, p. 5). Esses itens, quando analisados a partir de seus contextos, promovem diferentes questões que podem ser investigadas em pesquisas, que se alinham aos interesses da IHEM. Na presente pesquisa, o documento considerado é o tratado *The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment* (1639) e as réguas para cálculo de William Oughtred (1574-1660), no qual ambos são apresentados na seção seguinte desse escrito.

Do ponto de vista da IHEM, os documentos como os instrumentos os tratados têm funções históricas e didáticas. Na perspectiva didática, esses instrumentos se caracterizam por serem

> [...] ferramentas utilizadas para o desenvolvimento de práticas laboratoriais, para fazer observações e/ou realizar experimentos; ou como um aparato para realizar cálculos aritméticos, medição de comprimento, altura, profundidade, peso, entre outros; para o cálculo de distâncias lineares e angulares; ou ainda para compreender fenômenos naturais, tais como pressão, temperatura, volume, força, etc (RIBEIRO, PEREIRA, 2023, p. 2-3).

Assim, os documentos inseridos na formação do professor de Matemática, são reconfigurados à recursos didáticos, que carregam em si, elementos incorporados da sua história e do seu contexto, além dos conceitos matemáticos.

Para a realização dessas *ações* e *produções*, a IHEM organiza-se entre seus pressupostos históricos, considerando o movimento histórico e historiográfico para a sua constituição e o caráter didático-pedagógico, pois alinha-se a diversas perspectivas de ensino, que articulados com os recursos históricos, permitem a significação e ressignificação de conhecimentos matemáticos.

Essas *ações* são os movimentos propostos que visam promover a mobilização do conhecimento matemático, realizadas sobre o objeto histórico que emergiu do diálogo. A partir desse documento, a IHEM prevê a execução de dois movimentos: 1) contexto no qual os conhecimentos foram elaborados e 2) movimento do pensamento na formação do conceito. O primeiro, analisa no contexto histórico o documento e considera, para isso, a análise a partir de três esferas: contextual, historiográfica e epistemológica em que:

> 1) na dimensão epistemológica, o foco permeia na compreensão de aspectos conceituais referentes àquilo que se deseja investigar. 2) a análise sob o viés historiográfico considera a vertente atualizada como forma de compreender os aspectos concernentes ao desenvolvimento do conceito. 3) a articulação dessas duas dimensões citadas à contextual se conecta para buscar expor como ocorreu o desenvolvimento dos conteúdos envoltos na pesquisa (ALVES, 2019, p. 83).

Já o movimento do pensamento na formação do conceito, "[...] enfoca, por meio do processo histórico, a formação do conceito matemático em si, pautando-se no objeto matemático em formação que permite a construção de ideias lógicas que componham o movimento do pensamento" (ALVES, 2019, p. 83). Esse direciona-se mais ao modo como os conhecimentos são incorporados e analisados no cognitivo, caracterizando o movimento que o pensamento faz ao se deparar com situações novas ou com aquelas, cuja ideia ainda não está formalizada. Os dois movimentos da IHEM não ocorrem em ordem pré-fixada de execução. Na verdade, eles acontecem de modo simultâneo, a partir dos pesquisadores que o realizam.

Essas ações da IHEM direcionam-se para as *produções* que possam inserir a história da matemática na formação de professores de Matemática, levando em consideração elementos de ordem histórica, matemática, didática e pedagógica. Nesse sentido, uma atividade ou ação formativa construída com base nas orientações da IHEM considera a realização de: 1) **tratamento didático** no(s) documento(s) – como traduções e pequenas adaptações textuais nos documentos e a reconstrução de antigos instrumentos, para que o público da atividade possa ter contato com a fonte histórica; 2) **intencionalidade** para direcionamento dessa atividade, que precisa considerar, dentre seus objetivos, que o foco está na construção do conhecimento matemático e 3) **plano de ação**, para nortear a execução da atividade ou ação formativa, ou seja, um planejamento didático-pedagógico.

Não é objetivo desse texto aprofundar sobre essas três realizações. Desse modo, enfoca os resultados das atividades elaborados e aplicadas para a formação de professores que ensinam Matemática, por meio de um curso de extensão universitária, apresentado na seção cinco.

3. As réguas para cálculo e o tratado

Os séculos XVI e XVII foram palco de intensas mudanças para a cidade de Londres na Inglaterra, devido ao investimento da coroa em expansões marítimas impulsionando seu desenvolvimento comercial. Nesse sentido, não só ocorreram mudanças sociais e culturais, mas também intelectuais, tornando Londres um ambiente de valorização de conhecimento, principalmente aqueles ligados as matemáticas[8]. Diante desse cenário surgem os praticantes das matemáticas, “um grupo de estudiosos ingleses que se dedicavam às matemáticas práticas, fabricando instrumentos e escrevendo tratados” (SAITO, 2015, p. 171-172). Sobre esses instrumentos, nos séculos XVI e XVII, eles “foram concebidos para medir aquilo que Aristóteles denominava ‘quantidades’ (distância e ângulos)” (SAITO, 2015, p. 187).

Dentre esses praticantes das matemáticas está William Oughtred (1574-1660), um homem que “ao mesmo tempo em que se dedicava a vida religiosa, como um ministro anglicano, ele também se ocupava com os estudos sobre os conhecimentos matemáticos de seu período e a buscar melhorias para o ensino dessa arte” (ALVES, PEREIRA, 2024, p. 120-121). Ao longo de sua vida, escreveu e publicou tratados que retratavam instrumentos matemáticos, sendo um deles as réguas de cálculo[9], uma circular chamada de Círculos de Proporção (*Circles*

[8] Conforme Saito (2015), a especialização e unificação dos conhecimentos matemáticos em uma área chamada de matemática ocorreu a partir de meados do século XVIII. Antes disso, existiam várias matemáticas compreendidas e categorizadas segundo as orientações aristotélicas nos séculos XVI e XVII, por isso, usa-se o termo no plural.

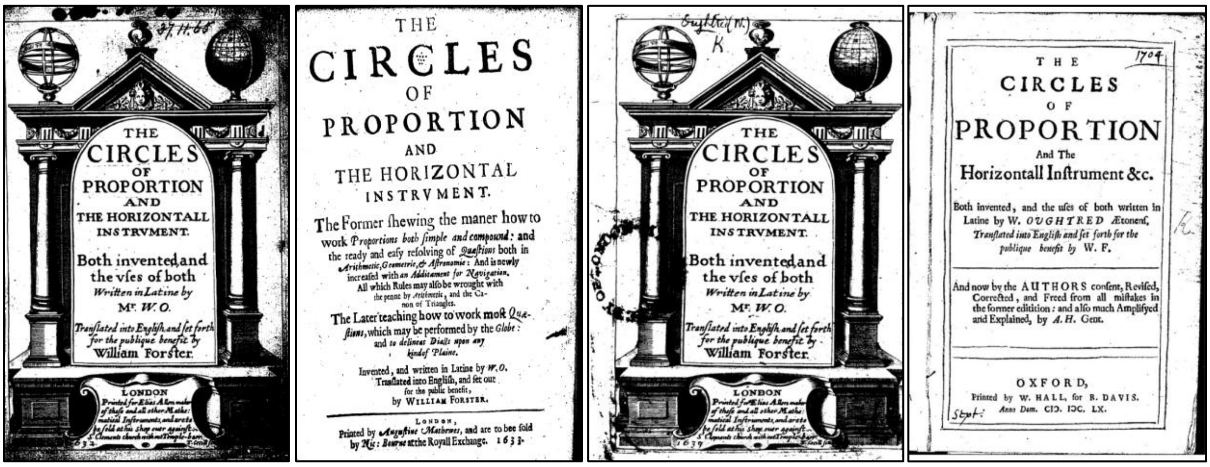
[9] As réguas de cálculo estiveram em uso até meados dos anos de 1970 como importantes instrumentos de cálculo, que englobavam diversos conhecimentos matemáticos, tais como, operações aritméticas e logarítmicas.

of Proportion) e um par de réguas lineares destaca em seus textos como Duas réguas para Cálculo (*Two Rulers for Calculation*).

A respeito dos Círculos de Proporção[10], não será aprofundada a discussão nesse texto, no entanto, é necessário destacar alguns pontos que se relacionam com as réguas lineares de Oughtred. Para isso, inicialmente é preciso discorrer a respeito do tratado que apresenta esses instrumentos.

O tratado *The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment* teve sua primeira edição pública em 1632 (Figura 1). Além dessa, outras edições que são conhecidas datam de 1633, 1639 e 1660 (Figura 1). Nessa pesquisa, considera-se o movimento da tradução e análise das quatro edições para se compreender de modo mais preciso o seu conteúdo, através da comparação dos escritos.

Figura 1 – Frontispícios de *The Circles of ... Instrvment*, de 1632, 1633, 1639, 1660, da esquerda para direita



Fonte: Oughtred (1632, 1633a, 1639, 1660, frontispícios).

De maneira geral, o tratado é dividido em duas partes, a primeira contendo 14 capítulos que retrata "[...] o trabalho de proporções simples e compostas, e para a pronta e fácil resolução de questões tanto na Aritmética, Geometria e Astronomia, por cálculo" (OUGHTRED, 1633a, p. 1, tradução nossa)[11]. É nessa parte que Oughtred apresenta o Círculos de Proporção como sendo uma das faces de um objeto. Já a segunda parte, segundo Alves (2019) apresenta apenas um capítulo contendo 30 tópicos a respeito de outro artefato histórico chamado Instrumento Horizontal (*Horizontal Instrument)* que se encontra no "[...] segundo lado do instrumento, para

[10] Para conhecer mais detalhes sobre o instrumento Círculos de Proporção, recomenda-se Alves (2019).
[11] Em inglês, lê-se: "[...] the working of Proportions both fimple and compounded, and for the ready ande afie refolving of queftions both in Arithmetique, Geometrie, and Aftronomie, by Calculation" (OUGHTRED, 1633a, p. 01).

o trabalho da maioria das questões que podem ser realizadas pelo Globo, e a declinação de medições, em qualquer tipo de planície" (OUGHTRED, 1633a, p. 113, tradução nossa)[12].

Ao longo das demais edições desse tratado, ocorreram correções de alguns cálculos e reorganização de seu conteúdo, no Quadro 1 a seguir é mostrado o conteúdo de cada edição, assim como o impressor responsável.

Quadro 1 – Conteúdo das edições de *The Circles of......Instrvment*

Ano	Impressor	Conteúdo da edição
1632	Elias Allen (c.1588-1653)	Apresenta a primeira parte retratando os Círculos de Proporção e a segunda parte abordando o Instrumento Horizontal.
1633	Augustine Mathewes (fl.1615-1637)	Apresenta a primeira parte retratando os Círculos de Proporção, a segunda parte abordando o Instrumento Horizontal e a menção de uma adição ao tratado contendo uma declaração de Duas Réguas para Cálculo, porém não foi anexada no tratado que se tem acesso.
1639	Elias Allen (c.1588-1653)	Apresenta a primeira parte retratando os Círculos de Proporção, a segunda parte abordando o Instrumento Horizontal e uma adição ao tratado contendo uma declaração de Duas Réguas para Cálculo datada de 1633.
1660	W. Hall[13]	Apresenta a primeira parte retratando os Círculos de Proporção, a segunda parte abordando o Instrumento Horizontal e uma adição ao tratado contendo uma declaração de Duas Réguas para Cálculo datada de 1660.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Apesar de Oughtred (1633a, frontispício, tradução nossa) relatar que "E foi recentemente aumentado com uma adição para Navegação", essa adição não foi anexada na edição de 1633 que se tem acesso, sendo encontrada apenas anexada ao tratado *The Circles of ... Instrvment* de 1639. Por esse motivo, há necessidade do cotejamento de informações entre as quatro edições da obra.

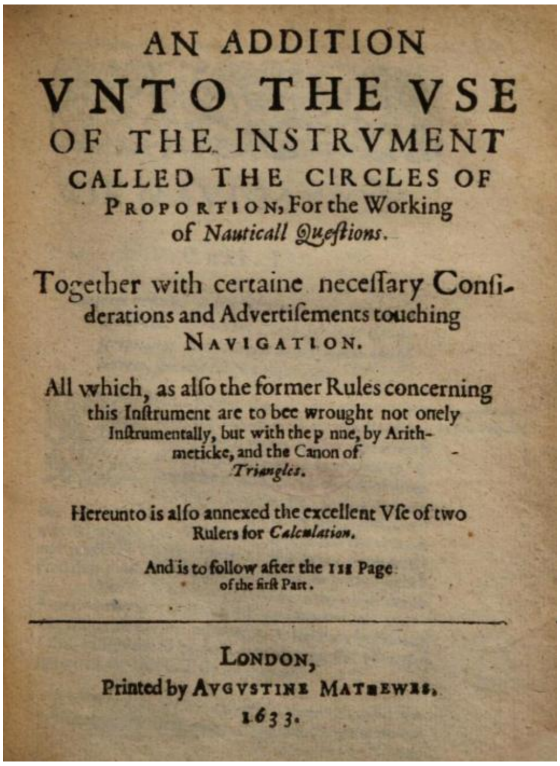
Essa adição, intitulada como *An addition vnto the vse of the instrvment called the Circles of Proportion, for the working of Nauticall Questions* (Figura 2), aborda o uso dos Círculos de Proporção para o trabalho de questões náuticas, apresentando ao final uma declaração, nomeada por *The declaration of the Two Rvlers for Calculation* (Figura 3). Essa

[12] Em inglês, lê-se: "[...] second fise of the instrument, for the working of moft questions, which may be performed by the Globe: and the declination of Dyals, vpon any kinde of Plaine" (OUGHTRED, 1633a, p. 113).

[13] Não se foi encontrado até o momento de escrita desse artigo informações a respeito do ano de nascimento e falecimento do impressor.

declaração, enuncia duas réguas “[...] cuja funcionalidade está atrelada à resolução de questões aritméticas, geométricas e trigonométricas. Essas réguas apresentam tamanhos diferentes, sendo a mais longa denominada *Staffe* e a mais curta denominada *Transversarie*, tendo um comprimento de quase três para dois” (LIMA; SOARES; PEREIRA, 2023, p. 3).

Figura 2 – Frontispício de *An addition vnto the vse ... Nauticall Questions* (1633)



AN ADDITION
VNTO THE VSE
OF THE INSTRVMENT
CALLED THE CIRCLES OF
PROPORTION, For the Working
of *Nauticall Queſtions*.

Together with certaine neceſſary Conſiderations and Advertiſements touching
NAVIGATION.

All which, as alſo the former Rules concerning this Inſtrument are to bee wrought not onely Inſtrumentally, but with the p nne, by Arithmeticke, and the Canon of *Triangles*.

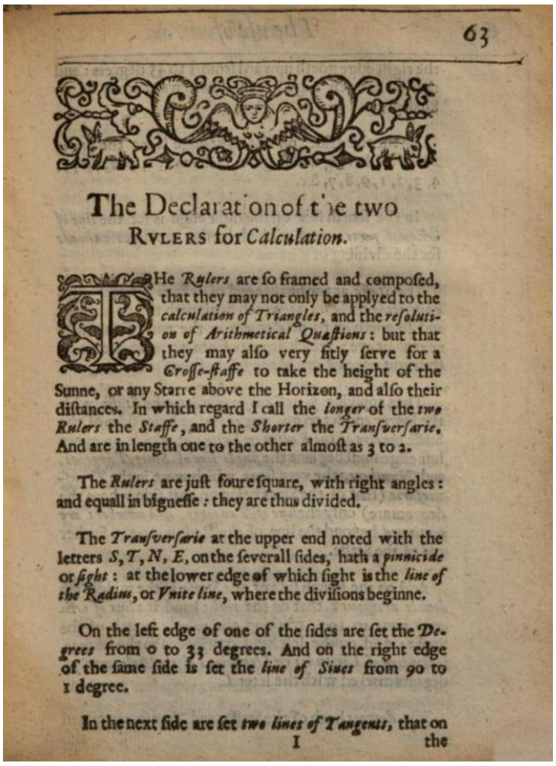
Hereunto is alſo annexed the excellent Vſe of two Rulers for *Calculation*.

And is to follow after the 111 Page of the firſt Part.

LONDON,
Printed by AVGVSTINE MATHEWES,
1633.

Fonte: Oughtred (1633b, frontispício)

Figura 3 – Primeira página de *The declaration of the Two Rvlers for Calculation* (1633)



63

The Declaration of the two
RVLERS for *Calculation*.

THe *Rulers* are ſo framed and compoſed, that they may not only be applyed to the *calculation of Triangles*, and the *reſolution of Arithmetical Quaſtions*: but that they may alſo very fitly ſerve for a *Croſſe-ſtaffe* to take the height of the Sunne, or any Starre above the Horizon, and alſo their diſtances. In which regard I call the *longer* of the *two Rulers* the *Staffe*, and the *Shorter* the *Tranſverſarie*. And are in length one to the other almoſt as 3 to 2.

The *Rulers* are juſt foure ſquare, with right angles: and equall in bigneſſe: they are thus divided.

The *Tranſverſarie* at the upper end noted with the letters *S, T, N, E*, on the ſeverall ſides, hath a *pinnicide* or *ſight*: at the lower edge of which ſight is the *line of the Radius*, or *Vnite line*, where the diviſions beginne.

On the left edge of one of the ſides are ſet the *Degrees* from 0 to 33 degrees. And on the right edge of the ſame ſide is ſet the *line of Sines* from 90 to 1 degree.

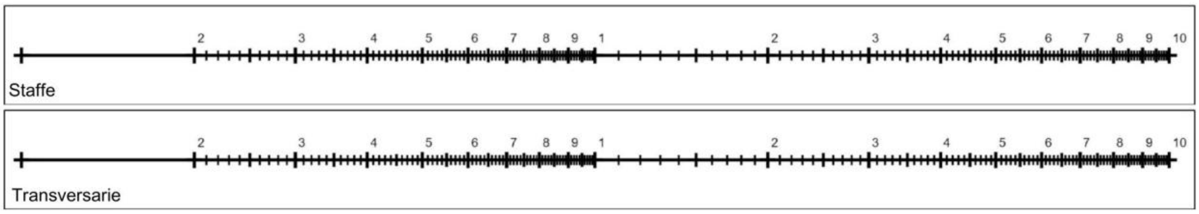
In the next ſide are ſet *two lines of Tangents*, that on
I the

Fonte: Oughtred (1633b, p.63)

Em cada uma das réguas estão contidas diferentes escalas graduadas. Na régua *Transversarie* há as escalas dos Senos, Números, Tangentes e Partes Iguais, e na régua *Staffe* estão inseridas as mesmas escalas da régua *Transversarie* adicionando uma linha de Latitudes[14]. Nesse estudo iremos dar foco no uso de somente uma dessas escalas, a dos Números (Figura 6), que é descrita como uma linha "[...] tendo essas figuras em ordem decrescente 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, etc" (OUGHTRED, 1633b, p. 64, tradução nossa)[15]. Apesar das réguas terem tamanhos diferentes, essa escala, em especial, apresenta tamanhos iguais nas duas. É válido mencionar que, a declaração não apresenta nenhuma imagem desse instrumento e, todo o processo de reconstrução dessa escala, considerando a IHEM, foi realizado por meio de leituras secundárias de outras obras relacionadas a ela, no qual em vista do objetivo do presente escrito, não será detalhada[16].

[14] Para informações detalhadas a respeito das escalas contidas nessas réguas vide Lima, Soares e Pereira (2023).
[15] Em inglês, lê-se: [...] having these figures in descent 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7,&c (OUGHTRED, 1633b, p. 64).
[16] Um detalhamento a respeito da reconstrução dessa escala por ser visto em Lima, Soares e Pereira (2023).

Figura 4 – Escala dos Números reconstruída no GeoGebra



Fonte: Elaborada pelas autoras (2024).

Em sua declaração, após descrever as escalas inseridas em cada régua, o autor menciona o manuseio delas, dizendo que,

> ao trabalhar com uma proporção usando as réguas, *segure a Transversarie em sua mão esquerda, com a extremidade onde está a linha do raio ou linha unitária e, voltada para longe de você, girando esse lado da régua para cima, em que está a linha do tipo do primeiro termo, seja ele número, seno ou tangente: e nele busque o primeiro termo e o outro que lhe é homogêneo. Em seguida, pegue o Staffe em sua mão direita com o lado para cima, no qual está a linha do tipo do quarto termo procurado: e procure nele o termo homogêneo para o quarto. Aplique isso ao primeiro termo no Transversarie e o outro termo homogêneo mostrará no Staffe o quarto termo* (OUGHTRED, 1633b, p. 65, grifo do autor, tradução nossa)[17].

Dito isso, William Oughtred não se detém escrevendo novas regras sobre a utilização de suas réguas, apenas as relaciona com os Círculos de Proporção, dizendo que:

> Assim, você tem nas duas réguas as mesmas linhas que estão em círculos de proporção e tudo o que pode ser feito por esses círculos, também pode ser executado pelas duas réguas e as regras que foram anteriormente definidas para esse instrumento, podem também ser praticado sobre eles, de modo que você tenha o cuidado de observar as diferentes propriedades no trabalho. Portanto, não será necessário fazer qualquer discurso novo e longo sobre essas réguas, mas apenas mostrar a maneira, como elas devem ser usadas, para o cálculo de qualquer proporção dada (OUGHTRED, 1633b, p. 65, tradução nossa)[18].

Portanto, muitos dos teoremas de aplicação das réguas descritos por Oughtred direcionados aos Círculos de Proporção, também são considerados para as réguas lineares. Um deles, o de proporção, diz: "Se de três números dados, o primeiro divide o segundo e o quociente multiplica o terceiro; o produto será o quarto proporcional aos três números indicados"

---

[17] Em inglês, lê-se: In working a proportion by the rulers, *hold the Transversarie in your left hand, with the end at which the line of the radius or unite line is, from you ward, turning that side of the ruler upward, on which the line of the kind of the first terme is, whether it be Number, Sine, or Tangent: and therein seeke bolt the first terme, and the other which is homogene to it. Then take the Staffe in your right hand with that side upward, in which the line of the kind of the fourth terme sought for is: and seek in it the terme homogene to the fourth. Apply this to the first terme in the Transversarie: and the other homogene terme shall in the Staffe shew the fourth terme* (OUGHTRED, 1633b, p. 65).

[18] Em inglês, lê-se: Thus have you on the two rulers the very same lines which are in circles of proportion, and what so ever can be done by those circles, may also as well be performed by the two rulers and the rulers which have bin here formerly set downe for that instrument, may also be practised upon these: so that you be care full to observe in both the different propriety in working. It will not therefore be need full, to make any new and long discourse, concerning these rulers, but only to shew the manner, how they are to be used, for the calculation of any proportion given (OUGHTRED, 1633b, p. 65).

(OUGHTRED, 1639, p. 5, tradução nossa)[19]. Dito isso, a aplicação apresentada e discutida nesse artigo utilizou-se do teorema mencionado anteriormente e das indicações de manuseio envolvendo as réguas de Oughtred.

4. Aspectos metodológicos

A realização de toda pesquisa científica, segue as pré-organizações determinadas no viés metodológico e o estabelecimento de uma base teórica de fundamentação para o seu desenvolvimento. No que diz respeito ao fundamento teórico desse estudo, ele segue as orientações da construção de uma Interface entre História e o Ensino de Matemática (IHEM) (SAITO; DIAS, 2013; PEREIRA; SAITO, 2019) associado a elementos da etnografia educacional (ANDRÉ, 2013), que embasam alguns posicionamentos tomados no estudo. Não se trata de uma pesquisa etnográfica pura, mas de um estudo, que se concebe por meio de uma abordagem multirreferencial (BORBA, 1998). Portanto, o método etnográfico que "se caracteriza fundamentalmente por um contato direto do pesquisador com a situação pesquisada, permite reconstruir os processos e as relações que configuram a experiência escolar diária" (ANDRÉ, 2013, p. 34), e também o ato da reflexão e da reconstrução dessa prática escolar.

A pesquisa é de caráter qualitativo, pois se direciona ao "[...] reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e na variedade de abordagens e métodos" (FLICK, 2008, p. 23). Assim, não se tem o objetivo de quantificar resultados ou trabalhar com a estatística, mas sim, de compreender a influência do processo subjetivo e objetivo do trabalho, com vistas a estabelecer diferentes reflexões sobre a temática. O Quadro 2 a seguir, organiza a pesquisa em cinco etapas.

[19] Em inglês, lê-se: If of three numbers given, the first divide the second and the quotient multiply the third, the product shall be the fourth proportionall, to the three numbers given (OUGHTRED, 1639, p. 5).

Quadro 2 – Organização da pesquisa

Etapa	**Elementos da etapa**
1ª etapa: Estabelecimento das bases teórico-metodológicas	Levantamento bibliográfico e documental; Estudo histórico, epistemológico, contextual, baseados na IHEM; Processos de tradução e análise dos documentos; Estudo matemático das situações que envolvem o documento e as réguas;
2ª etapa: Caracterização metodológica da pesquisa	Caracterização da pesquisa: qualitativa, bibliográfica, documental de cunho descritivo; Coleta de dados: Curso de extensão universitária; Instrumentos de coleta de dados: Questionário inicial e final, atividades ao longo do curso, entrevistas; Público-alvo: Licenciandos em Matemática e Pedagogia;
3ª etapa: Organização didático-pedagógica da experimentação	Tratamento didático dos materiais históricos; Intencionalidade didática; Plano de ação;
4ª etapa: Aplicação	Execução da ação formativa;
5ª etapa: Análise de dados	Análise de Conteúdo e descrição dos achados;

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024)

Para a 1ª e 2ª etapas, realizou-se um levantamento de fontes, utilizando as técnicas da pesquisa bibliográfica, concordando-se com Marconi e Lakatos (2017) que todo estudo, ainda que não esteja mais em fase preliminar, segue a perspectiva bibliográfica, pois, a todo momento, há necessidade de consultar

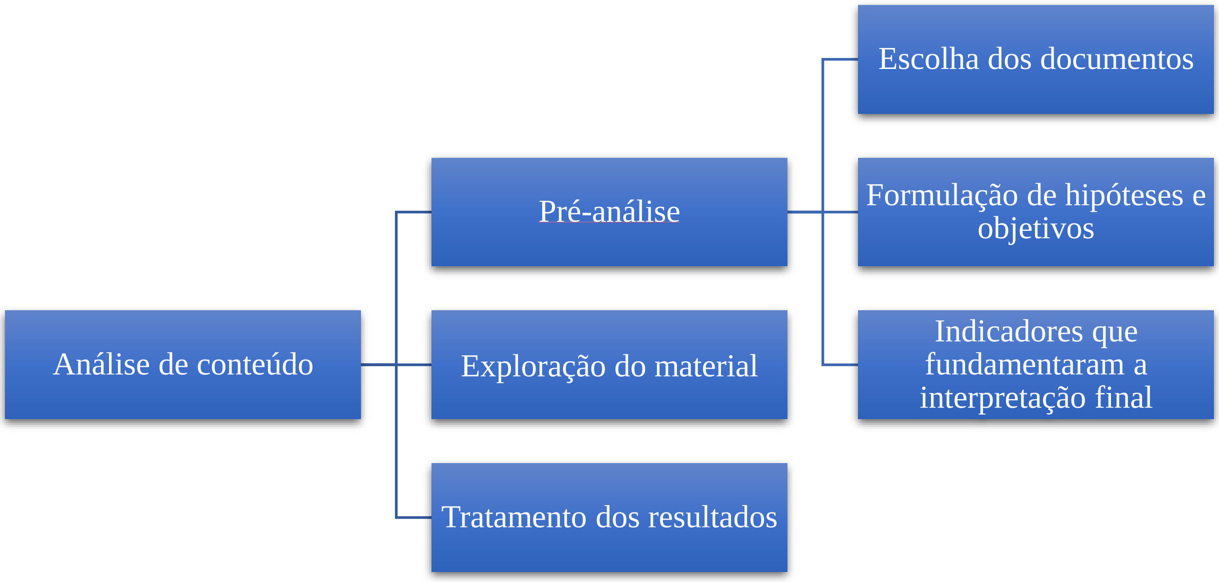
> [...] bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico etc., até meios de comunicação orais: rádio, gravações em fita magnética e audiovisuais: filmes e televisão (MARCONI; LAKATOS, 2017, p. 200).

Além dessa, a técnica da pesquisa documental também compôs o estudo, já que “baseia-se em materiais que não receberam ainda um tratamento analítico ou que podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa” (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 55). No caso desse estudo, cuja orientação segue a perspectiva da IHEM, considera-se as fontes históricas nessa investigação, da qual chama-se aqui de fontes primárias, pois trata-se daquela, e principal, “[...] que está sendo analisada, independentemente de ser um documento ou um texto original” (SILVA, 2018, p. 41). No estudo, utiliza-se como principais fontes o tratado intitulado *The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment* (1639) e outros documentos contemporâneos a esse, assim como, as réguas para cálculo.

Na 3ª e 4ª etapas, o estudo foi direcionado a organização de materiais, planejamento da ação e a coleta de dados em uma aplicação realizada por meio de um curso de extensão universitária, que será mais bem descrito em seção própria, com um objetivo mais amplo de discutir as possíveis relações da história da matemática com a educação matemática.

E, a 5ª etapa da pesquisa consistiu na organização e análise de dados, das quais se utilizou da Análise de Conteúdo de Bardin (2011), pois o principal elemento de análise é [...] a mensagem, seja ela verbal (oral ou escrita), gestual, silenciosa, figurativa, documental ou diretamente provocada" (FRANCO, 2005, p. 13). A análise dos dados organiza-se conforme mostra a Figura 5.

Figura 5 – Organização das etapas da Análise de Conteúdo



Fonte: Elaborado pelas autoras (2024) adaptado de Bardin (2011)

Bardin (2011, p. 126) explica que o primeiro movimento a ser executado de posse dos dados é a realização da leitura flutuante na atividade da pré-análise pois "[...] consiste em estabelecer contato com os documentos a analisar e em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações". Em outras palavras, significa ler todo o material disponível previamente, sem estabelecer nenhum tipo de ação, para em seguida, a partir das primeiras impressões obtidas, iniciar o processo de organização e sistematização dos dados.

De modo global, a leitura flutuante foi realizada sobre todo o material de análise disponibilizado e, para esse escrito, se está dando ênfase na atividade do nono encontro do curso. Assim, é sobre ela que se concentram as demais etapas da análise e discussão dos dados.

É a partir desse movimento, que se chega ao segundo ponto da pré-análise, ou seja, a etapa de formulação de hipóteses e objetivos, que se referem a orientar de modo geral o estudo a partir de um objetivo estabelecido e verificar mediante uma análise, uma hipótese previamente estabelecida. E, por fim, a terceira etapa da pré-análise diz respeito aos indicadores que orientam a interpretação, e esses podem ser a menção de um tema em uma mensagem, por exemplo (BARDIN, 2011). A partir de uma pré-análise bem executada e compreendida, as demais etapas da análise de conteúdo devem seguir de modo fluido, conforme Bardin (2011).

Desse modo para a exploração do material, foi realizado a leitura do Cartão Produto, organizando as informações por equipe, para elaboração dos núcleos de sentido e posteriormente, das categorias. E, a etapa do tratamento dos dados, ou seja, a análise propriamente dita, é apresentada na seção de discussão dos dados deste texto.

5. O curso de extensão universitária

O curso intitulado "Efetuando multiplicações por meio da manipulação das Duas Réguas para Cálculo de William Oughtred" contou com carga horária de 30 horas/aulas, ocorrendo entre os dias 11 de abril a 04 de maio de 2023, no Laboratório de Matemática e Ensino Professor Bernardo Rodrigues Torres (LabMatEn) na Universidade Estadual do Ceará (UECE)[20]. No total, foram disponibilizadas 16 vagas, que foram preenchidas por alunos devidamente matriculados nos cursos de Licenciatura em Matemática e de Pedagogia da UECE-*Campus* Itaperi, entretanto apenas 13 cursistas participaram de forma assídua.

Essa atividade foi proposta em parceria com o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) articulando com o seu Programa de Formação Docente (PFD), que se caracteriza por promover um conjunto de ações, como palestras, eventos científicos, grupos de estudo, oficinas, cursos de extensão e minicursos, que objetivam uma melhoria na formação, inicial ou continuada, de professores que lecionam Matemática[21].

O objetivo principal do curso foi abordar e mobilizar conhecimentos históricos e matemáticos relativos as Duas Réguas para Cálculo de William Oughtred, tendo como pontos principais de discussão o processo histórico relacionado as matemáticas do século XVII e a matemática presente na constituição e na manipulação, dando ênfase na operação aritmética de multiplicação realizada através das réguas. Para uma compreensão ampla a respeito dos conteúdos que seriam abordados, optou-se por organizá-los em três unidades, cada uma com seus respectivos objetivos específicos (Quadro 3).

[20] Para mais informações sobre o LabMatEn, vide Pereira e Vasconcelos (2014).
[21] Uma explicação detalhada sobre o Programa de Formação Docente (PFD) do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) pode ser encontrada em Pereira, Batista e Oliveira (2022).

Quadro 3 – Objetivos específicos de cada unidade

Unidades	Objetivos específicos
UNIDADE 1: A prática matemática do século XVII 1.1. Apresentação inicial e primeiras orientações. 1.2. A Inglaterra no século XVII e os praticantes das matemáticas. 1.3. William Oughtred e o instrumento "as duas réguas para cálculo.	- Explorar junto aos participantes o contexto histórico inserido no século XVII das diversas matemáticas existentes e da importância da prática matemática para o período; - Estudar os praticantes das matemáticas e sua importância para o desenvolvimento da ciência no século XVII; - Apresentar a importância dos instrumentos matemáticos, em especial as Duas Réguas para Cálculo, como parte integrante da matemática prática do século XVII; - Compreender a importância de William Oughtred para a matemática do século XVII.
UNIDADE 2: A escala dos números das duas réguas para cálculo de William Oughtred 2.1. As escalas contidas nas duas réguas para cálculo de William Oughtred. 2.2. A construção da escala dos números de Edmund Gunter. 2.3. O manuseio das duas réguas para cálculo. 2.4. As primeiras regras da operação de multiplicação por meio do instrumento das duas réguas para cálculo.	- Mediar discussões a respeito da manipulação da escala dos números das Duas Réguas para Cálculo contidas em *The Declaration of the Two Rules for Calculations (1639).* - Entender o processo de construção da escala dos números e os conhecimentos matemáticos articulados. - Compreender como se dá o manuseio para a utilização das réguas. - Refletir sobre as primeiras regras da operação de multiplicação por meio do instrumento Duas Réguas para Cálculo.
UNIDADE 3: A operação de multiplicação utilizando as duas réguas para cálculo de William Oughtred 3.1. A aplicação das regras de multiplicação na resolução de problemas. 3.2 Elaboração de um modelo geral para efetuar a operação de multiplicação utilizando as duas réguas para cálculo.	- Aplicar as regras da operação de multiplicação para a resolução de problemas. - Elaborar um modelo geral para efetuar a operação de multiplicação utilizando as duas réguas para cálculo.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024)

De maneira geral, a aplicação do curso contou com onze encontros, sendo o primeiro voltado as informações iniciais de apresentação, realização de uma sondagem inicial e a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e o último com o preenchimento de sondagem final. O Quadro 4 a seguir indica os temas que foram retratados em cada encontro.

Quadro 4 – Temas de cada encontro do curso de extensão universitária

Encontro	Tema
1º	Apresentação do Curso de Extensão Universitária e Sondagem Inicial.
2º	Contexto histórico do século XVII, alguns praticantes das matemáticas do século XVII e suas contribuições.
3º	William Oughtred, biografia e obras.
4º	Sobrevoo pela declaração das Duas Réguas para Cálculo.
5º	Os conceitos matemáticos presentes na escala dos números das Duas Réguas para Cálculo.
6º	A operação de multiplicação por meio da escala dos números de William Oughtred.
7º	O teorema de William Oughtred para a formalização da operação de multiplicação.
8º	A regra de proporção para a operação de multiplicação por meio das Duas Réguas para Cálculo.
9º	O teorema de proporção de William Oughtred para a formalização da operação de multiplicação.
10º	Modelo geral do processo multiplicativo através das Duas Réguas para Cálculo de William Oughtred.
11º	Considerações finais, Sondagem final e encerramento do curso.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

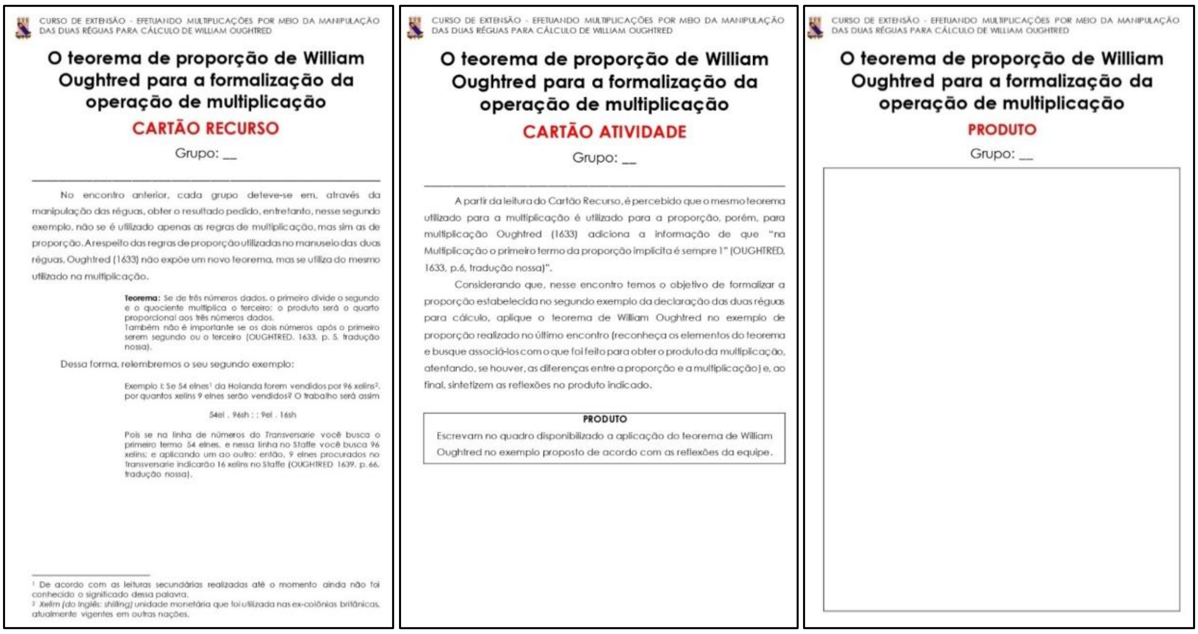
Sendo assim, a atividade que se discute nesse escrito foi aplicada no nono encontro do curso, tendo os cursistas o objetivo principal de aplicar o teorema de proporção no exemplo retirado do tratado histórico e registrar suas percepções no Cartão Produto fornecido.

6. A aplicação

Para a realização da atividade, os cursistas foram divididos em quatro equipes, sendo uma delas de quatro integrantes e as outras de três integrantes cada. Desse modo, para cada equipe foram entregues um par das réguas *Staffe* e *Transversarie* reconstruídas, um Cartão Recurso, um Cartão Atividade e um Cartão Produto.

O Cartão Recurso forneceu as principais informações para a compreensão da atividade, enquanto que o Cartão Atividade orientou os cursistas sobre o que deveriam fazer nela e no Cartão Produto eles deveriam registrar as resoluções do que foi proposto na atividade. Na Figura 6 são mostrados os cartões que foram entregues para cada uma das equipes.

Figura 6 – Cartão Recurso, Cartão Atividade e Cartão Produto



CURSO DE EXTENSÃO - EFETUANDO MULTIPLICAÇÕES POR MEIO DA MANIPULAÇÃO DAS DUAS RÉGUAS PARA CÁLCULO DE WILLIAM OUGHTRED

O teorema de proporção de William Oughtred para a formalização da operação de multiplicação

CARTÃO RECURSO

Grupo: __

No encontro anterior, cada grupo deteve-se em, através da manipulação das réguas, obter o resultado pedido, entretanto, nesse segundo exemplo, não se é utilizado apenas as regras de multiplicação, mas sim as de proporção. A respeito das regras de proporção utilizadas no manuseio das duas réguas, Oughtred (1633) não expõe um novo teorema, mas se utiliza do mesmo utilizado na multiplicação.

> **Teorema:** Se de três números dados, o primeiro divide o segundo e o quociente multiplica o terceiro: o produto será o quarto proporcional aos três números dados.
> Também não é importante se os dois números após o primeiro serem segundo ou o terceiro (OUGHTRED, 1633, p. 5, tradução nossa).

Dessa forma, relembremos o seu segundo exemplo:

> Exemplo I: Se 54 elnes[1] da Holanda forem vendidos por 96 xelins[2], por quantos xelins 9 elnes serão vendidos? O trabalho será assim
>
> 54el . 96sh : : 9el . 16sh
>
> Pois se na linha de números do *Transversarie* você busca o primeiro termo 54 elnes, e nessa linha no Staffe você busca 96 xelins; e aplicando um ao outro: então, 9 elnes procurados no Transversarie indicarão 16 xelins no Staffe (OUGHTRED, 1639, p. 66, tradução nossa).

[1] De acordo com as leituras secundárias realizadas até o momento ainda não foi conhecido o significado dessa palavra.
[2] *Xelim (do Inglês: shilling)* unidade monetária que foi utilizada nas ex-colônias britânicas, atualmente vigentes em outras nações.

CURSO DE EXTENSÃO - EFETUANDO MULTIPLICAÇÕES POR MEIO DA MANIPULAÇÃO DAS DUAS RÉGUAS PARA CÁLCULO DE WILLIAM OUGHTRED

O teorema de proporção de William Oughtred para a formalização da operação de multiplicação

CARTÃO ATIVIDADE

Grupo: __

A partir da leitura do Cartão Recurso, é percebido que o mesmo teorema utilizado para a multiplicação é utilizado para a proporção, porém, para multiplicação Oughtred (1633) adiciona a informação de que "na Multiplicação o primeiro termo da proporção implícita é sempre 1" (OUGHTRED, 1633, p.6, tradução nossa)".

Considerando que, nesse encontro temos o objetivo de formalizar a proporção estabelecida no segundo exemplo da declaração das duas réguas para cálculo, aplique o teorema de William Oughtred no exemplo de proporção realizado no último encontro (reconheça os elementos do teorema e busque associá-los com o que foi feito para obter o produto da multiplicação, atentando, se houver, as diferenças entre a proporção e a multiplicação) e, ao final, sintetizem as reflexões no produto indicado.

PRODUTO
Escrevam no quadro disponibilizado a aplicação do teorema de William Oughtred no exemplo proposto de acordo com as reflexões da equipe.

CURSO DE EXTENSÃO - EFETUANDO MULTIPLICAÇÕES POR MEIO DA MANIPULAÇÃO DAS DUAS RÉGUAS PARA CÁLCULO DE WILLIAM OUGHTRED

O teorema de proporção de William Oughtred para a formalização da operação de multiplicação

PRODUTO

Grupo: __

Fonte: Elaborada pelas autoras (2024).

A primeira informação contida no Cartão Recurso era uma introdução retomando o que havia sido discutido no encontro anterior, a respeito da manipulação das réguas para a resolução de um exemplo de multiplicação, e, posteriormente foi exposto novamente o teorema de William Oughtred, visto em atividades anteriores, para o cálculo de proporção[22]. Com isso, foi mencionado o seguinte exemplo:

> Exemplo I: Se 54 elnes da Holanda forem vendidos por 96 xelins[23], por quantos xelins 9 elnes serão vendidos? O trabalho será assim
>
> $$54el\,.\,96sh\ ::\ 9el\,.\,16sh.$$
>
> Pois se na linha de números do *Transversarie* você busca o primeiro termo 54 *elnes*, e nessa linha no *Staffe* você busca 96 xelins; e aplicando um ao outro: então, 9 *elnes* procurados no *Transversarie* indicarão 16 xelins no *Staffe* (OUGHTRED, 1633a, p. 66, grifo do autor, tradução nossa)[24].

Para indicar o que as equipes deveriam realizar, o Cartão Atividade solicitava que o teorema deveria ser aplicado no exemplo mencionado e os registros sobre a atividade deveriam ser feitos no Cartão Produto fornecido. Diante disso, apresentamos os registros das quatro equipes.

[22] Devido o teorema de William Oughtred ter sido apresentado na seção "As réguas para cálculo e o tratado" optou-se por não o repetir nessa seção.
[23] No Cartão Recurso havia uma nota de rodapé indicando: *Xelim (do Inglês: shilling)* unidade monetária que foi utilizada nas ex-colônias britânicas, atualmente vigentes em outras nações.
[24] Em inglês, lê-se: Example I: If 54 elnes of Holland be sold for 96 shillings: for how many shillings shall 9 elnes be sold? The worke shall be thus $54^{el}\,.\,96^{sh}$ :: $9^{el}\,.\,16^{sh}$.
for if in the line of Numbers on the transversarie you seeke the first terme 45 elnes, and in that line on the *Staffe*: you seeke 96 shillings, and apply one to the other, then shall 9 elnes sought out on the *Transversarie* point out 16 shilling on the *Staffe* (OUGHTRED, 1633a, p. 66).

Equipe 1: Aplicação do teorema com o exemplo 1: Primeiramente escolhemos o primeiro termo entre os termos 54, 96 e 9. Sendo ele 54, escolhemos o 96 como segundo termo e o dividiremos pelo primeiro: $\frac{96}{54}$.
Em seguida, multiplicamos 9 (3º termo) ao quociente encontrado: $\frac{96}{54} \cdot 9$.
O quarto proporcional será o produto do 3º termo com o quociente (chamaremos de x): $\frac{96}{54} \cdot 9 = x \Rightarrow \frac{96}{6} = x \Rightarrow 16 = x$. *Logo, 16 é o quarto proporcional.*
Analisando por meio da proporcionalidade, temos: $\frac{96}{54} = \frac{x}{9}$.
x *(Quarto proporcional), será o quarto valor envolvido na relação de proporcionalidade.*
Nas réguas: Se considerarmos a posição da Staffe acima da Transversarie, os números marcados representarão os numeradores da relação de proporção encontrada, e os números marcados na Transversarie serão os denominadores dessa relação.

Equipe 2: *1º) Definir o primeiro termo do Transversarie.*
2º) Aplica-se o TEOREMA
**O 1º termo divide o 2º e o quociente MULTIPLICA o 3º, o resultado será o proporcional aos três números dados. A ORDEM DO 2º e 3º TERMO NÃO IMPORTA.*

$$\frac{96}{54} \cdot 9 = 16 \qquad \frac{9}{54} \cdot 96 = 16$$

MULTIPLICAÇÃO: 1º termo sempre é definido; Relação com fração unitária.
PROPORÇÃO: 1º termo não definido.

Equipe 3: *Primeiramente, como na atividade anterior, vamos definir quem são os termos. Vamos pegar o 54 como o 1º termo, de acordo com o teorema não faz diferença a escolha do 2º e 3º termo. Usando a régua, marcamos o 1º termo na Transversarie, que nesse caso é o 54, da 2º metade da régua. Na Staffe, a gente marca o 2º termo alinhando ao 1º, nesse caso o 2º termo é o 96. Após isso, marcamos o 3º termo na Transversarie e procuramos o número que está alinhado a ele na Staffe, que é o 16.*
O próximo passo do teorema diz que o 1º termo divide o 2º $54|96 \Rightarrow \frac{96}{54} = 1{,}77$.
Após isso, basta multiplicar o quociente pelo 3º termo e aí temos o proporcional aos 3 números dados: $1{,}77 \cdot 9 = 16$. *Observe que isso é facilmente percebido usando as réguas facilitando os cálculos.*

Equipe 4: *1º termo: 54 → Diferente de 1 (O que diferencia da multiplicação)*
2º termo: 96
3º termo: 9
4º termo: 16
Aplicando o teorema na régua, alinhamos o 96 do Staffe com o 54 do Transversarie, visualizamo que o 1 do Transversarie corresponde ao quociente de $\frac{96}{54}$*, logo podemos aproveitar o raciocínio do caso multiplicativo, já que* $1 \cdot \frac{96}{54} :: 9 \cdot 16$. *Portanto, o resultado é o 4º termo, como dito no teorema.*
Generalizando o teorema com a nossa linguagem: $a \cdot b :: c \cdot d \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} \cdot c = d$
Onde, 1º termo: a*, 2º termo:* b*, 3º termo:* c*, 4º termo:* d.
Logo, sendo $a = 1$*, teremos que* $\frac{b}{a} \cdot c = d \Rightarrow \frac{b}{1} \cdot c = d \Rightarrow b \cdot c = d$ *(um caso de multiplicação).*

Com os registros foi possível perceber que todas as equipes utilizaram o símbolo "·" para se referir a multiplicação, diferente do tratado matemático que usa o símbolo "×", diante disso para as discussões a seguir será mantida o símbolo "·" para representar uma multiplicação realizada, a fim do leitor reconhecer e associar as discussões com os cálculos feitos pelas equipes.

De maneira geral, as quatro equipes aplicaram as orientações de uso e os teoremas de Oughtred (1639) na execução da atividade, mobilizando seus conhecimentos matemáticos. No que diz respeito as situações proporcionais, de acordo com Lins e Gimenez (1997, p. 52), elas, "como esquema instrumental utilizam quatro tipos de técnicas fundamentais: redução à unidade, modelagem proporcional, modelagem fracionária e modelagem algébrica", das quais observamos principalmente as três últimas mobilizadas pelos cursistas.

A equipe 1 desenvolve seu raciocínio associando inicialmente a razão $\frac{96}{54}$ que, em seguida, multiplica pelo valor 9, fazendo $\frac{96}{54}.9$. Até esse ponto, a principal técnica utilizada corresponde a redução à unidade. No entanto, a equipe 1 prossegue empregando um valor desconhecido e fazendo $\frac{96}{54} \cdot 9 = x \Rightarrow \frac{96}{6} = x \Rightarrow 16 = x$, parte para uma modelagem algébrica.

Já a equipe 2, busca trabalhar especificamente com as orientações de Oughtred (1633a), e destaca que a ordem do segundo e do terceiro termo não importam, ou seja, considerando o número 96 como segundo termo e 9 como terceiro termo, têm-se a formação da estrutura $\frac{96}{54} \cdot 9 = 16$ e considerando 9 como segundo termo e 96 como terceiro termo, têm-se $\frac{9}{54} \cdot 96 = 16$, com isso, mesmo sem relatar, a equipe está trabalhando com a propriedade comutativa da multiplicação, aplicando também a técnica de redução à unidade.

Além disso, a segunda equipe relaciona a proporção com a operação de multiplicação, vista nos encontros anteriores do curso, no qual o primeiro termo da multiplicação é sempre definido, pois se remete a uma fração unitária, ou seja, o primeiro termo é sempre 1. Já na proporção, o primeiro termo não é definido, logo pode ser qualquer número diferente de 1.

Nos registros da equipe 3, é possível observar a utilização de valores decimais, pois a equipe divide 96 por 54 resultando em 1,77, empregando a técnica de redução a unidade. Após multiplicar esse quociente com o terceiro termo é obtida a igualdade $1{,}77 \cdot\ 9 = 16$. Por último, a equipe 4 ao nomear os respectivos termos, registra um comentário semelhante ao da equipe 2, ressaltando que o primeiro termo 54 é diferente de 1 e que isso diferencia da operação de multiplicação. Diferente das demais equipes, a equipe 4 realiza o cálculo solicitado com a notação da operação de multiplicação, fazendo $1 \cdot \frac{96}{54} :: 9 \cdot 16$, estrutura correspondente ao texto histórico, então realiza nas réguas uma multiplicação entre a dízima periódica de $1{,}7\overline{7}$ e o número 9, resultando em uma aproximação ao número 16.

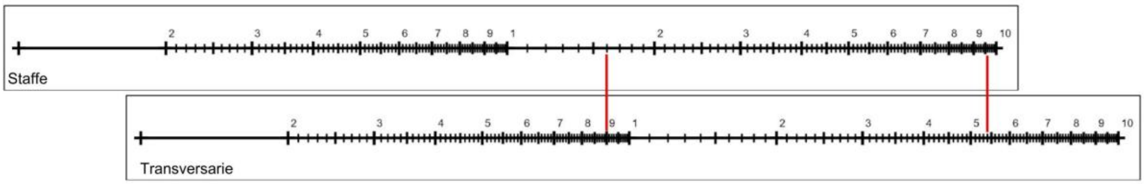
Nesse sentido é possível observar que as equipes 3 e 4 trabalharam com a dízima periódica de $1{,}7\overline{7}$, pois dividiram o número 96 por 54, tendo uma aproximação do número 16, enquanto as equipes 1 e 2 que realizaram a multiplicação entre frações obtiveram o resultado exato.

Ademais, a equipe 4 ainda destaca uma generalização do teorema de William Oughtred para o cálculo de uma proporção com linguagem conhecida por eles. Considerando $1º\ termo\colon a, 2º\ termo\colon b, 3º\ termo\colon c$ e $4º\ termo\colon d$, em uma proporção, manipulando a igualdade entre as frações $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ implicaria no teorema trabalhado $\frac{b}{a} \cdot c = d$. Já no caso de multiplicação, ao aplicar o teorema de William Oughtred com primeiro termo a sendo igual a 1, temos $\frac{b}{1} \cdot c = d \Rightarrow b \cdot c = d$.

Através as ações executadas pelos participantes, nota-se que há a realização do movimento de tradução do conhecimento visto na fonte histórica para o conhecimento moderno, ou seja, um tipo de comparação. Isso é um movimento natural, e conforme explica Alves (2019, p. 83) os sujeitos "se deparam com a mesma tentativa de compreender as matemáticas do passado se utilizando de conceitos modernos, observando o movimento que é feito". Embora essa ação possa remeter ao anacronismo, Alves (2019) explica que não há como evitá-la, pois só se pode compreender os novos conhecimentos que estão sendo discutidos a partir de conhecimentos pré-existentes, e esses conhecimentos pré-existentes dos estudantes são conceitos matemáticos modernos. Portanto, isso caracteriza um dos modos como o movimento do pensamento na formação do conceito matemático se apresenta.

No que se refere ao manuseio das réguas para a resolução do exemplo, a equipe 2 não indicou em seus registros como obteve o quarto proporcional por meio do instrumento matemático. Em contraponto, a equipe 1 salienta que, diante da igualdade entre as razões $\frac{96}{54} = \frac{x}{9}$, ao se considerar a régua *Staffe* acima da régua *Transversarie*, os numeradores dessas razões poderão ser marcados na régua *Staffe* e os denominadores na régua *Transversarie* (Figura 7)[25].

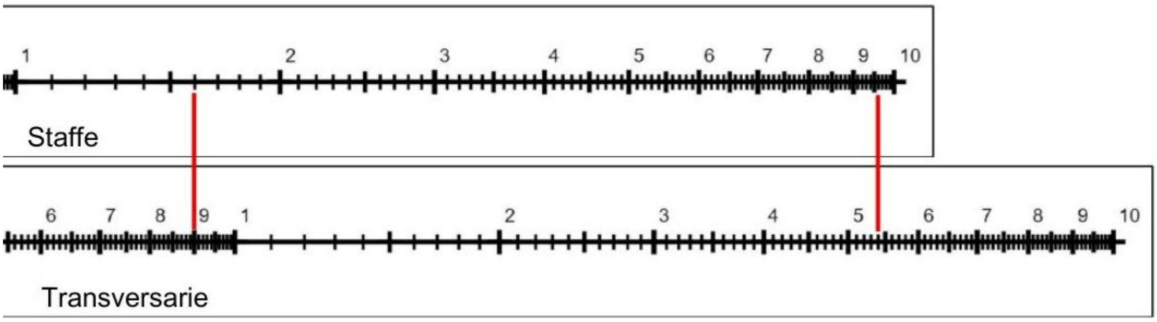
Figura 7 – Manuseio das réguas pela equipe 1



Fonte: Elaborada pelas autoras (2024).

[25] Todas as figuras referentes ao manuseio das réguas foram elaboradas pelas autoras para melhor entendimento do leitor a respeito do instrumento, visto que não houve registros fotográficos da atividade no momento do manuseio pelas equipes.

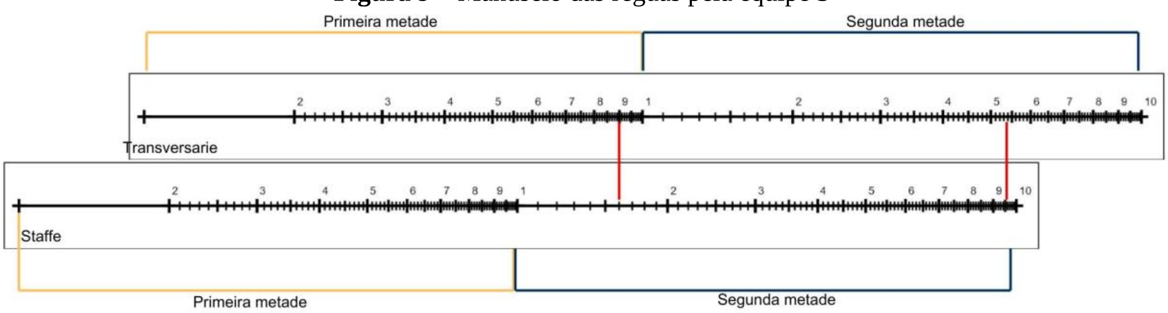
Figura 8 – Recorte do manuseio das réguas pela equipe 1



Fonte: Elaborada pelas autoras (2024).

Já a equipe 3 indica a posição dos valores iniciais 54, 96, e 9 obtendo um valor aproximado[26] de 16, ao fazer a leitura no instrumento. Na Figura 9 a seguir é possível visualizar o manuseio das réguas por parte da equipe, no qual as linhas amarelas e azuis na imagem indicam o momento em que os números das réguas começam a repetir, sendo nomeadas pela equipe por "primeira metade" e "segunda metade" respectivamente, já as linhas vermelhas correspondem aos números alinhados.

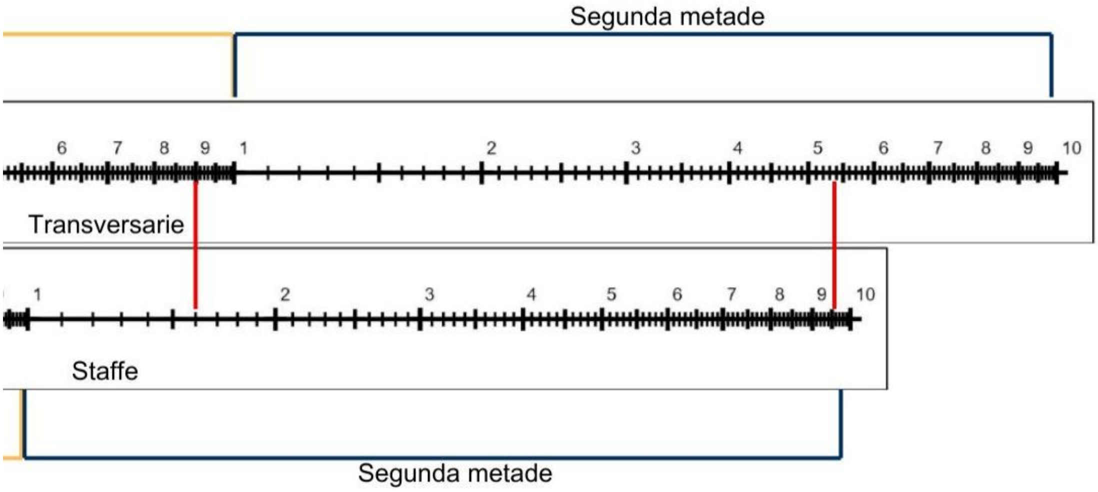
Figura 9 – Manuseio das réguas pela equipe 3



Fonte: Elaborada pelas autoras (2024).

[26] Oughtred (1639) explica a maneira de realizar a leitura de qualquer valor nas réguas, ainda que sua graduação seja limitada.

Figura 10 – Recorte do manuseio das réguas pela equipe 3



Fonte: Elaborada pelas autoras (2024).

Não foi possível elaborar uma figura a respeito da configuração de manuseio da equipe 4 pois, em seus registros, a equipe não forneceu informações sobre onde poderia ser encontrado cada termo da proporção nas réguas.

A diferença no raciocínio empregado pelas quatro equipes nos mostra que a temática da proporcionalidade não pode ser reduzida há uma simples fração e, nem tampouco a unicamente uma técnica algébrica. Desse modo ao empregar a utilização das réguas *Staffe* e *Transversarie* na formação de professores que ensinam Matemática, permite que eles tenham uma possibilidade de visualizarem de maneira tátil e geométrica o emprego do conceito de razão e proporção ao manipularem o instrumento.

Já ao se empregar também o escrito de Oughtred, esses professores em formação inicial tiveram contato com vários modos de se raciocinar a respeito da proporcionalidade. Assim puderam ver que realizar cálculos que envolvem proporção, eles podem ser executados por meio de diversas técnicas e níveis de raciocínio, ampliando os conhecimentos a respeito da temática, e por conseguinte, possibilitando uma reflexão sobre sua futura ação docente.

Sendo assim, por meio dessa atividade, além do conhecimento de proporcionalidade, os cursistas conseguiram mobilizar os conceitos de razão, numerador e denominador de uma fração, multiplicação e simplificação de frações, propriedade comutativa da multiplicação, fração unitária, dízima periódica e arredondamento de números decimais.

Isso, na formação do professor que ensinará Matemática, é um importante movimento que o possibilitará aprender sobre temas que podem não ter sido bem construídos em sua formação a nível de educação básica e ensino superior.

7. Considerações finais

A atividade realizada revelou interessantes ações na formação do conceito matemático de proporção, dos participantes. Destacou que a princípio, as razões e proporções estabelecidas são, em grande parte, entendidas como frações. Isso evidencia uma possível compreensão parcial da proporcionalidade uma vez que durante todo o curso de extensão, sempre estavam relacionando a frações. Ainda que a noção de proporcionalidade não possa ser reduzida a somente uma ideia de fração, tais conhecimentos possuem relação e esse são estabelecidos pelos participantes.

O movimento realizado pelos participantes ao manusear o instrumento, permite outro nível de aproximação com o conhecimento que está sendo discutido. Ao manusear o objeto reconstruído, no caso, as réguas *Staffe* e *Transversarie*, e por meio das orientações e informações contidas no texto histórico, os estudantes têm a sua disposição, um artefato que utiliza diversos conceitos matemáticos, que, considerados na sua episteme, podem promover a atribuição de significado de conhecimentos que estão sendo trabalhados na atividade.

Portanto, uma atividade orientada a partir da IHEM não visa sobrepor temas históricos as questões educacionais modernas, mas sim, auxiliar no processo de significar esse conhecimento matemático, de modo que possa ultrapassar barreiras de meras memorizações, e possa se estabelecer como um conceito, de fato, aprendido e compreendido.

Também, destaca-se o manuseio dos instrumentos no curso como um elemento potencialmente didático na construção de significados e na ressignificação de conhecimentos previamente estabelecidos pelos participantes, que podem permitir a esse professor em formação inicial, apropriar-se de novas compreensões sobre o conteúdo matemático que irá ensinar.

8. Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa – (PROPGPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

9. Referências

ALVES, Verusca Batista Alves. Pesquisas que articulam conhecimentos trigonométricos e algébricos por meio de instrumentos matemáticos. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 32, p. 1–24, 2024a. DOI: 10.30938/bocehm.v11i32.12412.

ALVES, Verusca Batista Alves. Instrumentos matemáticos históricos que mobilizam conhecimentos algébricos para a formação do professor de Matemática. In: Isabel Maria Sabino de Farias; Jones Baroni Ferreira de Menezes; Lídia Andrade Lourinho; Marluce Torquato Lima Gonçalves; Nilson de Souza Cardoso. (Org.). **Pesquisas no campo da formação de professores na retomada da democracia**: Qual a agenda?. 1ed. Fortaleza: INESP, 2024b, v. 1, p. 352-358.

ALVES, Verusca Batista. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred**. 2019. 156 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, Fortaleza, 2019.

ALVES, Verusca Batista; PEREIRA, Ana Carolina Costa. William Oughtred (1574-1660) e o ensino das matemáticas nos séculos XVI e XVII. **História da Ciência e Ensino**: construindo interfaces, S.L, v. 29, n. 1, p. 116-130, jul. 2024.

ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Etnografia da prática escolar.** Campinas: Papirus, 2013.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo.** São Paulo: Edições 70, 2011. Tradução de: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro.

BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa Pereira. Um levantamento nacional e internacional de pesquisas que mobilizaram ou articularam saberes geométricos e trigonométricos por meio de instrumentos ou tratados antigos**. Revista História da Matemática para Professores**, [S. l.], v. 9, n. 1, p. 1–10, 2023.

BELTRAN, Maria Helena Roxo; SAITO, Fumikazu; TRINDADE, Lais dos Santos Pinto. **História da ciência para formação de professores.** São Paulo: Livraria da Física, 2014.

BORBA, Sérgio da Costa. Aspectos do conceito de multirreferencialidade nas ciências e nos espaços de formação. In: BORBA, Sérgio da Costa (Org.). **Reflexões em torno da abordagem multirreferencial.** São Carlos: EdUFSCar, 1998.

FLICK, Uwe. **Introdução à Pesquisa Qualitativa**. Editora Penso, 2008.

FRANCO, Maria Laura Puglisi Barbosa. **Análise de conteúdo**. 2 ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2005.

LAZZARETTI, Raiana. **Uma análise do conteúdo de razão e proporção em livros didáticos no ensino fundamental**. 2022. 163f. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Santa Maria, 2022.

LIMA, Amanda Cardoso Benicio de; SOARES, Kawoana da Costa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Diálogo sobre os conhecimentos aritméticos contidos na manipulação das duas réguas para cálculo de William Oughtred. **Educação Matemática Debate**, [S.L.], v. 7, n. 13, p. 1-18, 9 set. 2023. Universidade Estadual de Montes Claros (UNIIMONTES). http://dx.doi.org/10.46551/emd.v7n13a07.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus Editora, 1997.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científica.** 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

OUGHTRED, William. **The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment**. London: Elias Allen, 1632.

OUGHTRED, William. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment**. London: Augustine Mathewes, 1633a.

OUGHTRED, William. **An addition vnto the vse of the instrvment called the Circles of Proportion, for the working of Nauticall Questions**. London: Augustine Mathewes, 1633b.

OUGHTRED, William. **The Circles of Proportion and the Horizontall Instrvment**. London: Elias Allen, 1639.

OUGHTRED, William. **The Circles of Proportion and the Horizontall Instrument &c**. London: W. Hall, 1660.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Cocar**, UEPA, v. 13, n. 25, p. 342-372, fev. 2019.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; VASCONCELOS, Cleiton Batista. Construindo uma proposta pedagógica por meio de materiais manipulativos: Apresentando a fatoração algébrica estudada no LABMATEN/UECE. In: PEREIRA, Ana Carolina Costa. **Educação Matemática no Ceará.** Fortaleza: Premius Editora, 2014. Cap. 1. p. 9-27.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; OLIVEIRA, Gisele Pereira. O Programa de Formação Docente GPEHM/UECE e sua contribuição para as atividades extensionistas. In: CUNHA, Juliene Rezende *et al.* (org.). **Atividades de extensão inseridas no currículo: Contribuições sobre o fazer pedagógico**. Recife: Editora da Universidade de Pernambuco – Edupe, 2022. p. 156-175.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Proposta de atividade envolvendo multiplicação a partir da manipulação do Promptuario para a formação de professores. **Revista de Instrumentos, Modelos e Políticas em Avaliação Educacional**, [S.L.], v. 4, p. e023021, 30 dez. 2023.

SAITO, Fumikazu. **História da Matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SILVA, Isabelle Coelho da Silva. **Um estudo da incorporação de textos originais para a educação matemática: buscando critérios na articulação entre história e ensino.** 2018. 92f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.