

REVISITANDO A PROVA DOS NOVE: VESTÍGIOS DE SUA ORIGEM, ASCENSÃO E DECLÍNIO

REVISITING THE PROOF BY NINE: TRACES OF ITS ORIGIN, RISE AND DECLINE

Adalberto Cans¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-7580-6373>

Méricles Thadeu Moretti²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3710-9873>

David Antonio da Costa³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4493-9207>

Submetido 19 de setembro de 2022

Aprovado: 31 de outubro de 2022

RESUMO

Este artigo insere-se no campo da história da educação matemática e busca percorrer marcas de um conteúdo que por muito tempo foi ensinado com destaque nas escolas primárias: a prova dos nove. Hoje não mais pertencente aos programas escolares. Sendo assim, apresenta-se textualmente o esboço de uma linha do tempo, levantando indícios de sua origem, ascensão e queda. Chama-se atenção para a diferença entre “prova dos nove” e “noves-fora” e detalha-se a regra prática da prova dos nove para as quatro operações aritméticas fundamentais. Destaca-se o prestígio dessa prova na escola e fora dela. Faz-se uma análise de sua inconsistência quando aplicada para verificar a correção de uma operação aritmética. Por fim, revisa-se a abordagem da prova dos nove a partir da sistematização dos artigos de Lacava (2016); Lacava e Costa (2016); e Zuin (2019), sobrestados, respectivamente, as obras de José M. Lacerda “Arithmetica da Infância” (1890); Cezar Pinheiro “Arithmetica Primaria” (1902); e Carlos Góes “Exames de Admissão” (1930). Depreende-se dessa visita que a prova dos nove está alinhada nas três obras com as quatro operações fundamentais da aritmética, servindo-lhes como verificação de seus resultados a despeito de sua inconsistência.

ABSTRACT

This paper is part of the field of the history of mathematics education and seeks to study a content that has been taught prominently in primary schools for a long time: the proof by nine, today it no longer belongs to school programs. Thus, the outline of a timeline is presented textually, raising signs of its origin, rise and fall. Attention is drawn to the difference between “proof by nine” and “casting out nine” and the practical rule for the proof by nine for the four fundamental arithmetic operations is detailed. The prestige of this test at school and outside is highlighted. An analysis is made of its inconsistency when applied to verify the correctness of an arithmetic operation. Finally, the approach of the proof by nine is reviewed based on the systematization of the articles in Lacava (2016); Lacava and Costa (2016); and Zuin (2019), based, respectively, on the works *Arithmetica da Infância* (Arithmetic for Childhood) (1890) by José M. Lacerda; *Arithmetica Primaria* (Elementary Arithmetic) (1902) by Cezar Pinheiro and *Exames de Admissão* (Admission Exams) (1930) by Carlos Góes. From this revisiting, one must infer that the proof by nine is aligned in the three publications with the four fundamental Arithmetic operations, which is applied

¹ Mestre em Matemática – Universidade Federal de Rondônia (UNIR). Doutorando do Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECT/UFSC), Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. Endereço: Rua Jabuticabeira do Sul, 350, Ribeirão da Ilha, Florianópolis, SC, Brasil, CEP: 88.064-076. E-mail: adalbertocns12@gmail.com.

² Doutor em Didática da Matemática – Universidade de Estrasburgo (UNISTRA). Professor permanente do Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECT/UFSC), Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. Endereço: Campus Universitário, Centro de Ciências Físicas e Matemática, Trindade, Florianópolis, SC, Brasil, CEP: 88.040-900. E-mail: mthmoretti@gmail.com.

³ Doutor em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professor permanente do Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGECT/UFSC), Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. Endereço: Rua Douglas Seabra Levier, 163 ap. 208 Bloco B, Trindade, Florianópolis, SC, Brasil, CEP: 88.040-410. E-mail: david.costa@ufsc.br.

as a result correctness checking despite its inconsistency.

Palavras-chave: História da educação matemática; Verificação de operações aritméticas; Noves-fora.

Keywords: History of mathematics education; Verification of arithmetic operations; Casting out nine.

1 Introdução

A prova dos nove por séculos foi tópico e ocupou espaço nos Tratados de Aritmética pelo mundo. Como conteúdo, frequentou continuamente os livros didáticos, livretos de tabuada e foi ensinado por décadas nas salas de aula brasileiras. Sendo assim, o número reduzido de pesquisas no campo da história da educação matemática sobre esse tema, se constituiu na epifania que nos levou a considerar a construção desse artigo. Nos referimos a prova no sentido expressado por Pinheiro (1902, p. 12) “Prova é uma nova operação pela qual verifica-se o resultado (*sic*) da primeira”.

Com efeito, a prova dos nove ensinada nas escolas primárias do Brasil, na segunda metade do século XIX e primeira do século XX, embora não conste mais nos livros didáticos atuais, no passado obteve *status* de celebridade, como aludido em Lacava e Costa (2016, p. 55, grifo dos autores), “Assim, nas décadas passadas para conferir alguns cálculos utilizava-se a ‘famosa’ prova real ou a prova dos nove, a qual deixou de ser usada nas escolas com o passar dos anos”.

A revisão literária que nos oportunizou a fundamentação teórica dessa pesquisa, reflete a crescente relevância dos Repositórios de Conteúdos Digitais (os RCDs), posto que, tal fundamentação se concentra maioritariamente nos artigos de: Lacava (2016); Lacava e Costa (2016); e Zuin (2019), que constam do rico e substancial RCD da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Estes autores desenvolveram pesquisas sobre o tópico a “prova dos nove”, a partir de análises dos livros didáticos: “Arithmetica da Infancia”, de José M. de Lacerda (1890); “Arithmetica Primaria”, de Cezar Pinheiro (1902); e “Exames de Admissão ao Collegio Pedro II e Gymnasios equiparados”, de Carlos Góes (1930), respectivamente, usados como fontes principais em suas pesquisas, e dessa forma também serão considerados nesse trabalho. Note-se que, essas obras guardam informações educacionais que abrangem um período, no mínimo, de quatro décadas.

A Prova dos nove é conceituada por alguns estudiosos como sendo um método ou uma técnica (BEZERRA, 2013; ESQUINA, 2013; OLIVEIRA; LUTOSA, 1998). Outros autores, no entanto, a definem como regra (RIBEIRO, 2014; GÓES, 1930; PINHEIRO, 1902). Em particular Lacerda (1890) a trata como um modo de verificação. Independentemente dessa

conceituação há consenso com relação a sua utilização no passado – verificação do resultado das operações fundamentais da aritmética⁴ com números naturais: adição, subtração, multiplicação e divisão.

O crédito delegado a esse conteúdo escolar também não permitiu seu confinamento dentro dos muros da escola, segundo Zuin (2019, p. 528, grifo da autora), esse conteúdo “Ganhou também significado até no título da antologia ‘A alegria é a prova dos nove’ que compila alguns escritos de Oswald de Andrade (1890-1954)”. Ou ainda,

Enfim, percebemos que mesmo não sendo mais utilizada em sala de aula, a prova dos nove é um método que ainda é “utilizado por alguns comerciantes” para verificar se existem erros realizados nas quatro operações. Nela se escondem conceitos como divisibilidade, decomposição decimal de um número natural e indução matemática (BEZERRA, 2013, p. 12, destaque nosso).

Na perspectiva de Miguel, trata-se de uma prática sociocultural de verificação da correção de um cálculo escrito, como segue:

[...] melhor seria conceber a “prova” dos nove como uma prática sociocultural de verificação da correção de um cálculo escrito, e não como um conteúdo escolar autônomo e interno que, tal como se postula na perspectiva de Chervel (1990), teria sido criado “na escola, pela escola e para a escola”, ou então, como um suposto saber a ensinar que, tal como se postula na perspectiva de Chevallard (1991), teria sido transposto didaticamente da esfera sábia para o contexto escolar (MIGUEL, 2010, p. 5, grifos do autor).

Ponto de vista corroborado indiretamente por Zuin (2019, p. 528, grifo da autora) quando escreve “Como um método rápido e prático de verificação dos resultados das operações aritméticas elementares, a provas (*sic*) dos nove garantiu seu ‘prestígio social’”.

Dessa forma, estamos inclinados a concordar com Miguel (2010) e Zuin (2019) quanto ao caráter sociocultural da prova dos nove. Ainda hoje, gerações mais velhas enxergam aquele conteúdo com certo romantismo,

Entre as muitas recordações da minha infância, materializa-se a figura do meu avô paterno ensinando-me a prova dos nove. Naquela época, eu não podia entender o porquê deste tipo de “verificação mágica” não estar no meu livro de Matemática e nem ser ensinado pela minha professora do grupo escolar e, para ela, não ousei perguntar sobre este procedimento (ZUIN, 2019, Introdução, grifo da autora).

Lembro que na época que iniciei a universidade e comecei a ministrar aulas, ensinávamos os alunos a decorar a tabuada e assim, na resolução de operações com números naturais ensinávamos além da prova real, também a “prova dos nove-fora”, que se encontra presente ainda nos livretos de tabuada, os quais são vendidos em papelarias do Estado, sendo que esta prova ainda é aplicada por alguns comerciantes locais (BEZERRA, 2013, p. 9, grifo da autora).

⁴ “As operações fundamentais (*sic*) da arithmetica são quatro: somma ou addição, subtracção, multiplicação e divisão” (PINHEIRO, 1902, p. 11).

A partir do que foi compilado, este estudo tem a finalidade de problematizar a prova dos nove enquanto conteúdo matemático aplicado no Brasil aos anos iniciais de escolarização, no período de 1890 a 1930, levantar indícios de sua origem e declínio, como também analisar a abordagem desse conteúdo nos artigos e respectivos livros mencionados anteriormente.

2 Prova dos nove – vestígios históricos e reflexões

As fontes de pesquisa examinadas não são suficientemente seguras para apontar a origem da prova dos nove, ou melhor, não foram localizadas literaturas que indiquem a origem dessa prova. No entanto, há indícios de que ao limiar do primeiro milênio depois de Cristo, o bispo romano Hipólito (c. 170-285) teria descrito esse procedimento. Segundo Cajori (2007, p. 87, grifo do autor), esse teólogo foi “mencionado por ter dado os métodos da ‘prova’ de um cálculo denominado ‘noves e setes-fora’”. Este foi o primeiro indício referenciado que encontramos sobre a origem da prova dos nove. Note-se que, nele não há evidências do emprego do método na verificação de operações aritméticas.

Por outra parte, tanto Lacava e Costa (2016) quanto Zuin (2019), fundamentados em Eves (2004), convergem no sentido de que a prova dos nove usada para testar cálculos aritméticos estava presente nas obras de vários escritores árabes, inclusive na aritmética do astrônomo e matemático al-Khwoârizmî (c. 780-850). “Esse método integrava o primeiro texto árabe de aritmética que chegou até nós, elaborado (*sic*) Abu Jafar Mohamed ibn Musa Al-Khowârizmîal” (EVES, 2004) *apud* (ZUIN, 2019, p. 531).

Em Boyer (2012, p. 165, grifo do autor) encontramos,

al-Khwarismi escreveu dois livros sobre aritmética e álgebra, que tiveram papéis muito importantes na história da matemática. Um deles sobrevive apenas em uma única cópia de uma tradução latina, com título *De numero indorum* (Sobre a arte hindu de calcular), a versão árabe original tendo sido perdida.

Sendo assim, muito provavelmente, o método utilizado por al-Khwoârizmî constaria de, pelo menos, um dos livros destacados na citação do historiador da matemática Carl B. Boyer (c. 1906-1976), nos permitindo inferir a validade da referência anterior de Zuin (2019).

Outro registro importante se deve ao polímata conhecido como Ibn Sina ou Avicena (c. 980-1037) que, por volta do ano de Cristo 1020, deu detalhes sobre um processo denominado por ele “método hindu” de averiguar os cálculos aritméticos por meio da emissão de noves, outro indício da prova dos nove que também é compartilhado por Lacava e Costa (2016), e Zuin (2019).

Seguindo uma certa cronologia esses autores são unânimes em afirmar que a primeira obra de matemática impressa em língua portuguesa, que contém a prova dos nove, foi o livro “Tratado da Pratica de Arismetica (*sic*)”, de autoria do português Gaspar Nicolas, publicado pela primeira vez em 1519. Essa obra ainda teve diversas edições posteriores, com grande sucesso, como pudemos confirmar na publicação de 1590, Figura 1, localizada em uma versão digitalizada na Biblioteca Nacional de Portugal.

Figura 1 - Página da biblioteca nacional digital portuguesa

BIBLIOTECA NACIONAL DE PORTUGAL		biblioteca nacional digital	
Início Sítios temáticos Portuguese Culture Dic. Historiadores A Grande Guerra Cooperação Sobre a BND			
Livros digitalizados de Nicolas, Gaspar			
	Título	Tratado de Arismetica com muyta diligencia emmendada	←
	Data	1590	
	PURL	15205	
	Título	Tratado da pratica de Arismetica	
	Autor/Resp.	Nicolas, Gaspar; Figueiredo, Manuel de [1568-1630]	
	Data	1607	
	PURL	17371	
	Título	[Tratado da pratica de Arismetica	
	Data	1594	
	PURL	23249	

Fonte: <https://bndigital.bnportugal.gov.pt/indexer/index/livro/aut/PT/48503.html>

Acessado em 10/08/2021

De fato, essa obra já apresentava a prova dos nove como verificação para todas as operações aritméticas fundamentais. O autor inicialmente explicava de modo breve, mas detalhado, o procedimento para efetuar cada uma das operações: *assomar*, *deminuir*, *multiplicar e repartir* (na grafia do autor), em seguida apresentava um exemplo numérico e propunha a confirmação do resultado “tirando” os noves-fora ou os setes-fora, como será mostrado para a conta de adição na Figura 2, mais adiante.

Vale a pena ressaltar que a prova dos nove se refere à técnica na qual utilizamos o noves-fora de números naturais para verificar se o resultado das quatro operações fundamentais da aritmética está “correto” (OLIVEIRA; LUTOSA, 1998, destaque nosso).

Mas, o que significa tirar os noves-fora? Temos isto muito bem explicado em Lacava e Costa (2016, p. 58),

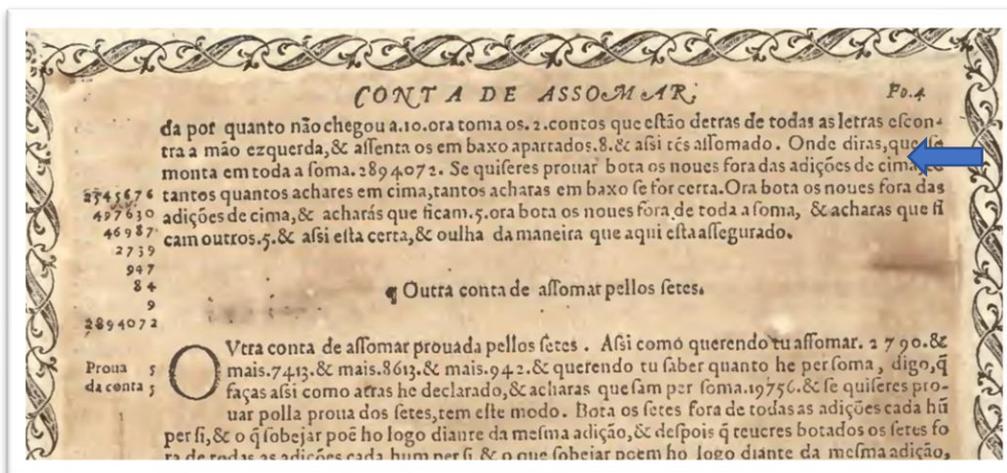
Tirar o noves-fora de um número natural qualquer n , significa subtrair deste número o maior múltiplo de nove nele contido, o que é equivalente a encontrar o resto da divisão deste número n por 9. [...]. Porém, existe uma maneira mais simples de se obter o noves-fora de um dado número natural. Soma-se os algarismos deste dado número que se deseja obter o noves-fora obtendo outro valor. A partir deste novo valor obtido, se o mesmo possuir mais de dois algarismos, soma-se novamente os algarismos e assim por diante até restar um número de um único algarismo.

Por exemplo, para tirar o nove-fora de 2894072 usando este modo mais simples, soma-se os algarismos do número dado, ou seja, $2 + 8 + 9 + 4 + 0 + 7 + 2 = 32$, em seguida soma-se novamente os algarismos do valor obtido até restar um único algarismo, isto é, $3 + 2 = 5$, caso encerrado. Desse modo, diz-se que 2894072 nove-fora 5, também se pode dizer: o resto da divisão de 2894072 por 9 é igual a 5.

Quanto a menção aos setes-fora na obra de Gaspar Nicolas; os autores Oliveira e Lutosa (2018) e Rodrigues (1989) esclarecem: não há nenhuma restrição teórica em utilizar-se, por exemplo, uma prova dos setes ou até dos quinze. O problema é essencialmente pragmático, ou seja, é muito mais prático e fácil encontrar o resto da divisão de um número natural não nulo por 9, do que o resto da divisão desse mesmo número por 15. Ademais, e essa nos parece a hipótese mais provável, usávamos a prova dos nove porque a base do nosso sistema de numeração é 10, e nessa base “cada número natural e a soma dos algarismos da sua decomposição decimal deixam o mesmo resto quando divididos por 9”. Este teorema está elegantemente demonstrado no artigo escrito por Lacava e Costa (2016, p. 59-60, grifo dos autores) intitulado “A prova dos nove e o caso da ‘Arithmetica Primaria’ de Cezar Pinheiro”, ao qual, sugerimos a visita dos leitores.

Vamos agora apreciar a Figura 2, anunciada anteriormente.

Figura 2 - Prova dos nove para conta de adição



Fonte: Tratado de Arismetica com mvyta diligencia emmendada (1590)

A importância desse documento para a história da educação matemática, e a beleza da prova contida na Figura 2, que possui mais de 430 anos, justificam o detalhamento e a ilustração “esculpida” na Tabela 1, para o deleite do leitor.

Tabela 1 - Prova dos nove para a conta de adição, detalhamento da Figura – 2

"Se quiseres provar bota os nove fora das adições de cima, & tantos quantos achares em cima, tantos acharás em baixo se for certa. Ora bota os nove fora das adições de cima, & acharás que ficam, 5. Ora bota os nove fora de toda soma, & acharás que ficam outros, 5. & assi esta certa, & oulha da maneira que esta assegurado"

Conta	Soma	Noves-fora das parcelas			
2 3 4 5 6 7 6	33	3+3 =	6	Nova soma	Noves-fora
4 9 7 6 3 0	20	2+0 =	2	6+2+7+3+2+3	5
4 6 9 8 7	25	2+5 =	7	23	
2 7 3 9	12	1+2 =	3	2+3	
9 4 7	11	1+1 =	2		
8 4	12	1+2 =	3		
+ 9	-	0 =	0		
2 8 9 4 0 7 2	23	Noves-fora do total		2+3	5

NOTA: (9) nove fora Zero, daí a possibilidade de exclusão ou não dos nove do cálculo dos nove fora

Fonte: acervo do autor

O destaque no texto dado mais atrás a palavra “correto” em uma citação de Oliveira e Lutosa (1998) foi providencial. Ocorre que, se aplicarmos o procedimento correto da prova dos nove e este acusar “erro”, o resultado da operação aritmética está errado. No entanto, se aplicarmos a prova dos nove corretamente e ela acusar que “não há erro”, não se pode garantir que o resultado da operação aritmética está correto. Esse inconveniente é explicado a seguir.

De acordo com Lacava e Costa (2016, p. 65), “O fato é que se a operação matemática estiver certa, e o aluno executar corretamente a prova dos nove, ela irá confirmar a exatidão dessa resposta. Porém, se a operação estiver errada há a possibilidade de a prova dos nove não detectar o erro”.

Realmente, a prova dos nove para qualquer uma das operações elementares da matemática depende do cálculo dos nove fora do seu resultado, ou seja, da soma dos algarismos que compõem esse resultado. Assim, como contraexemplo, vamos supor que o resultado de uma operação foi um número inteiro $X = a_1a_2 \dots a_n$, (n inteiro, $n \geq 1$), onde, a_1, a_2, \dots, a_n , são os algarismos de X . É óbvio perceber que qualquer permutação⁵ dos algarismos de X , resultará em outro resultado X_1 , mas a soma dos algarismos de X_1 , permanecerá a mesma de $X = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, e, portanto, o erro não será detectado pela prova dos nove. Tal como, se o resultado for 321, e o aluno colocar qualquer uma das permutações dos algarismos de 321, (123, 132, 213, 231 e 312), a prova dos nove apontará que a operação está correta, pois todos os nove fora desses números resultam em $6 = 1 + 2 + 3$, não detectando o erro.

⁵ Para n inteiro, $n \geq 2$, a Permutação de n elementos, sem repetição, é igual a $n!$

Existe ainda a possibilidade de outras variantes que levariam ao erro como, por exemplo, se o aluno coloca 240 como resultado, $240 \text{ noves-fora } 6 = 2 + 4 + 0$.

Assim, demonstrado está, que a prova dos nove não era confiável para verificação de cálculos aritméticos.

Retomando a trajetória histórica da prova dos nove, observamos que ela atravessou muito bem a era moderna⁶, sendo difundida em vários países ocidentais incluindo o Brasil e referenciada por figuras centrais da história da matemática como o matemático e filósofo alemão Leibniz (c. 1646-1716).

Marcelo Dascal (2008), em seu livro *G. W. Leibniz: the art of controversies*, destaca que Leibniz, em um de seus escritos, faz referência ao procedimento denominando “*method of casting out nines*”, o qual ele indica frequentemente como um exemplo da possibilidade de verificar “mecanicamente” e “visivelmente” se o resultado da operação está correto (ZUIN, 2019, p. 531, grifo da autora).

A pesquisadora Elenice de S. L. Zuin (2019) destaca, nesse período, o livro intitulado “Elementos de Arithmetica”, de autoria do francês Étienne Bézout como um dos textos de origem estrangeira mais adotados no Brasil, tanto em francês quanto na versão em português. Menciona ainda que, a denominada prova pela “regra dos nove” para as quatro operações fundamentais, era um dos tópicos constantes da edição portuguesa de 1784.

Adentrando a idade pós-moderna, a mesma autora sugere que o conteúdo em baila continuava a frequentar as escolas brasileiras, e enfatiza que, entre os livros publicados a partir do século XIX e adotados no Brasil por várias décadas, encontra-se a “Primeira Arithmetica para meninos” de José Theodoro S. Lobo (c. 1846-1913) que continha a “prova dos nove”.

2.1 Descontinuidade e últimos registros da prova dos nove

Ainda de acordo com Zuin (2019, p. 539) “Há que se destacar que as provas real e dos nove eram pontos a serem sorteados nos testes orais dos candidatos aos exames de admissão”. Ademais, os exames de admissão ao Colégio Pedro II foram regulamentados através do Decreto n. 981, de 8 de novembro de 1870, a saber:

Art. 31. Para admissão á matricula do 1º anno é indispensavel: 1º, que o candidato tenha pelo menos 12 annos de idade; 2º, que exhiba certificado de estudos primarios do 1º gráo, de accordo com o art. 6º desta lei, ou obtenha no proprio Gymnasio approvação em todas as materias daquelle curso; 3º, que prove ter sido “vaccinado” (sic). (BRASIL, 1870, destaque nosso).

⁶ Período específico da história do ocidente que se inicia em 1453 d.C. e vai até a revolução francesa 1789.

Esse tipo de processo seletivo perdurou e foi exigido no Brasil até 1971, sucumbindo apenas com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) n. 5692.

De outro giro, não foram encontrados registros que assegurem a partir de que momento ocorreu o abandono desse conteúdo nos livros e nas salas de aula brasileiras, nem tampouco as suas causas. Todavia, antes dessa ação há claramente um declínio gradativo, por exemplo, Zuin (2019) traz um adendo a sua pesquisa onde, segundo a autora, avaliou outros sete livros didáticos e dois cadernos escolares.

No século XX, autores como José Theodoro S. Lobo (Primeira Arithmetica para meninos, 51ª edição, 1950); Antonio Trajano (Arithmetica Elementar, 68ª edição, 1ª década do sec. XX); (Programa de Admissão - novo com a Matemática Moderna, 19ª edição, 1968) obra em que um dos organizadores é o famoso Oswaldo Sangiorgi; e Manhúcia Liberman, Lucília B. Sanches e Anna Franchi (Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau, 1974), excluíram a prova dos nove de suas obras (ZUIN, 2019).

Há vários modos de tirar a prova a uma operação de sommar ensinada nas escolas, mas alguns deles “não teem importância alguma”, como a “prova dos nove-fóra” que dá muitas vezes a operação como certa, estando errada. A prova preferível, pela sua exactidão e por ser ao mesmo analytical, é a seguinte que tem o nome de prova real (TRAJANO, s.d., p. 17, destaque nosso).

No entanto, essa prova ainda sobreviveu para outros como Carlos Góes (Exames de Admissão, 1930), Vicente Peixoto (Arithmetica, 1960) e João B. de Moraes (Admissão Ginásial, 43ª edição, 1963). Conforme essa autora “É necessário sinalizar que, pela Portaria n. 501, de 19 de maio de 1952, as provas real e dos nove se mantiveram como conteúdo dos exames de admissão ao ginásio” (ZUIN, 2019, p. 540).

Por outro lado, a pesquisadora deduz que,

O Movimento da Matemática Moderna parece ter contribuído para que os “nove fora” fossem relegados a um segundo plano como uma prática escolar. Os livros já citados, Admissão Ginásial, do ano de 1968, e o Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau, de 1974, não incluem as tais provas para as operações aritméticas elementares (ZUIN, 2019, p. 541).

Em seu trabalho a autora ainda afirma haver evidências da permanência da prova dos nove nas salas de aula através de cadernos pertencentes ao acervo do RCD da UFSC, como segue,

Ao analisar o intitulado Caderno Doméstico, do ano de 1970, encontramos a prova dos nove. Este pertencia à aluna Carlota Boto, que cursava o segundo ano, no Externado Nossa Senhora de Lourdes, escola de São Paulo.

Do Colégio Rio Branco, na capital paulista, o estudante da 4ª série, “Rafael” Rettori, também utiliza a prova dos nove para a verificação de todas as dezenas de operações que constam no seu caderno de tarefas do “ano de 1979” (ZUIN, 2019, p. 541, destaque nosso).

Observamos que, neste caso, o caderno encontrado no acervo do RCD da UFSC foi: [Caderno de Tarefas, Rettori, 4ª série, v.1, SP, 1978 – Rettori, Daniel (1978)]. E que, esse foi o último rastro encontrado da prova dos nove em nossa pesquisa, o que não significa a inexistência de outros, a própria autora sugere que “A partir dessa constatação, pode-se inferir que em outras instituições o processo também poderia continuar vigorando” (ZUIN, 2019, p. 541).

Finalmente, não foram localizadas evidências que indiquem as causas para o abandono da prova dos nove. De toda sorte, há fragmentos que podem ser analisados e que se tornam pequenas pistas que levam a conjecturas. Na perspectiva de Zuin,

Uma das hipóteses do abandono desse tipo de procedimento estaria ligada à popularização das calculadoras portáteis nos anos 1970. No entanto, essa suposição declina pelo motivo de muitas instituições escolares não permitirem aos alunos a utilização de aparelhos eletrônicos em sala de aula (ZUIN, 2019, p. 541).

Reforçando a perspectiva da autora, ainda hoje, mesmo com o desenvolvimento tecnológico acelerado, algumas escolas não permitem o uso de aparelhos eletrônicos em suas salas de aula.

Para continuidade desse esboço temporal, especificamente ao final do século XIX e início do XX, podemos acompanhar a avaliação dos artigos fontes dessa pesquisa, consubstanciados nos respectivos livros, através do Quadro 1 que está inserido na seção 4.

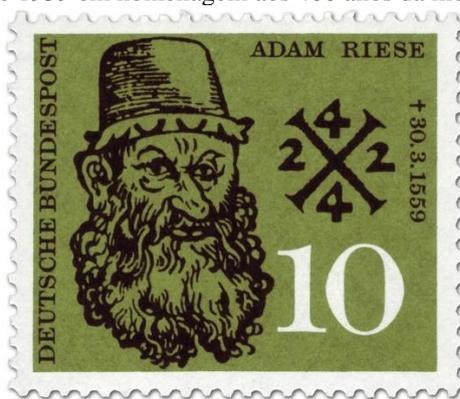
3 Prova dos nove – trilhas para as quatro operações fundamentais

O contrassenso a seguir realça o prestígio e justifica a apresentação dessas trilhas.

A prova real verifica “com segurança” o resultado de qualquer uma das operações fundamentais da aritmética, mas tem o inconveniente de ser uma prova em si mesma, isto é, na maioria dos métodos apresentados, para verificar a adição precisa-se acessar sua inversa, a subtração, e vice-versa, muitas vezes a operação de subtração ainda não foi nem apresentada. Para verificar a Divisão precisa-se recorrer a sua inversa, a multiplicação. Fato que é transferido parcialmente a prova dos nove. Por não ser o foco dessa pesquisa não vamos pormenorizar a prova real.

Por outro lado, como já foi mostrado nesse texto, a prova dos nove “não é confiável” para confirmar a correção do resultado dessas operações. Todavia, essa desconfiança não foi suficiente para diminuir o *status* da prova dos nove. Por exemplo, segundo Zuin (2019, p. 532) “Pode-se constatar o prestígio da prova dos nove em selos postais da Alemanha [...]. Era costume que a verificação do produto de uma multiplicação, pelo processo dos nove-fora fosse registrada em um dispositivo em forma de X (cruz numérica de Riese)”. Como pode ser visualizado na Figura 3.

Figura 3 - Selo de 1959 em homenagem aos 400 anos da morte de Adam Riese



Fonte: <http://blogdopg.blogspot.com/2019/09/de-acordo-com-adam-ries.html>

Assim, indicaremos, de forma breve, os procedimentos de execução da prova dos nove para as quatro operações aritméticas fundamentais.

3.1 Adição

Para verificar a correção ou não de uma adição usando a prova dos nove, deve-se calcular os nove-fora de cada parcela e somá-los, calculando novamente o nove-fora dessa soma parcial. Em seguida, obter-se os nove-fora da soma ou total e compará-los com os da soma parcial. Se, os resultados forem diferentes a adição está errada, caso contrário, “provavelmente” está correta.

O exemplo esquematizado a seguir, facilita a compreensão.

<i>Adição</i>	<i>Noves-fora</i>		<i>Comparando</i>
$1\ 3\ 2\ 4$	$1+3+2+4$	$\begin{array}{ c } \hline 10 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1+0\ 1 \\ \hline 8 \end{array}$
$+ 1\ 5\ 1$	$1+5+1$	$\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 8 \end{array}$
$\underline{1\ 4\ 7\ 5}$	$1+4+7+5$	$\begin{array}{ c } \hline 17 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1+7\ 8 \\ \hline 8 \end{array}$
<i>[Noves-fora da parte de cima]</i>			<i>Provavelmente correta</i>

3.2 Subtração

A prova dos nove para a subtração é análoga a da adição, a única alteração, neste caso, é que as parcelas passam a ser o subtraendo e a diferença, ou seja, deve-se calcular os nove-fora do subtraendo e da diferença e somá-los, guardando o resultado dos nove-fora dessa soma parcial. Em seguida, obter-se os nove-fora do minuendo e compará-lo ao resultado anterior. Se, esses números forem iguais a subtração “provavelmente” está correta, caso contrário, está errada. Observe-se que este procedimento recorre a prova real da subtração.

Segue um exemplo estruturado dessa operação.

<i>Subtração</i>	<i>Noves-fora</i>		<i>Comparando</i>
1 1 2 1	1+1+2+1	5	
- 3 5 4	3+5+4	12	5
0 7 6 7	0+7+6+7	20	5
			1+2 3
			2+0 2
			3+2 5
	[Noves-fora do subtraendo + diferença]		<i>Provavelmente correta</i>

3.3 Multiplicação

Para a multiplicação, a prova dos nove também se apresenta de modo muito simples. Deve-se calcular os nove-fora de cada fator e multiplicá-los, calculando ainda os nove-fora desse produto parcial. Se esse valor coincidir com os nove-fora do produto da multiplicação original a operação “provavelmente” está correta, senão, está errada.

Como exemplo, vamos supor que a multiplicação realizada foi, $254 \times 34 = 8636$.

<i>Multiplicação</i>	<i>Noves-fora</i>		<i>Comparando</i>
2 5 4	2+5+4	11	
x 3 4	3+4	7	5
8 6 3 6	8+6+3+6	23	5
			1+1 2
			7
			2+3 5
	[[Noves-fora 1º fator] x (Noves-fora 2º fator)]		<i>Provavelmente correta</i>
			2x7 14 1+4 5

3.4 Divisão

A prova dos nove da divisão segue o famoso algoritmo da divisão euclidiana, isto é, em uma divisão, com divisor não nulo, constata-se que: “divisor multiplicado pelo quociente mais o resto é igual ao dividendo” (formulado por Euclides de Alexandria, na obra clássica Os Elementos – Livro 7). Desse modo, para verificar o resultado de uma divisão devemos calcular os nove-fora do divisor e do quociente, multiplicá-los e somá-los ao resto, em seguida

determinar os noves-fora desse novo valor. Por fim, deve-se cotejar esse valor com os noves-fora do dividendo, se coincidirem a divisão “provavelmente” está correta, senão estará errada.

Vamos clarificar esse procedimento no exemplo a seguir.

<i>Divisão</i>			<i>Comparando</i>
2 0 0 7	$\left \begin{array}{r} 1 \ 5 \\ 1 \ 3 \ 3 \end{array} \right.$ <i>Noves-fora divisor</i>	1+5 6	$\frac{0}{0}$
	<i>Noves-fora quociente</i>	1+3+3 7	
(12)	<i>Noves-fora resto</i>	1+2 3	
	<i>[(Noves-fora divisor) x (Noves-fora quociente) + Noves fora resto]</i>	6x7+3 45 4+5 9 0	<i>Provavelmente correta</i>
	<i>Noves-fora do dividendo . . .</i>	2+0+0+7 9 0	

Importante mencionar que, as demonstrações matemáticas da prova dos nove para as quatro operações fundamentais da aritmética, podem ser acessadas no artigo de autoria de Lacava e Costa (2016, p. 61-65) intitulado “A prova dos nove e o caso da ‘Arithmetica Primaria’ de Cezar Pinheiro”, constante no acervo do RCD da UFSC, como também no diretório denominado “História da Educação Matemática” coordenado pelo GHEMAT-BRASIL⁷.

4 Extrato da abordagem metodológica da prova dos nove

Procuramos nessa seção, sistematizar no Quadro 1, a abordagem metodológica dedicada a esse tópico, a luz dos livros de (Lacerda, 1890; Pinheiro, 1902; e Góes, 1930) contidos nos artigos referidos.

Quadro 1 - Prova dos Nove em três livros didáticos no Brasil

Artigo Notas	Arithmetica da Infancia (1980) de Joaquim Maria de Lacerda e o conteúdo da prova dos nove	A prova dos nove e o caso da "Arithmetica Primaria" de Cezar Pinheiro	Revisitando a Prova dos Nove e a Prova Real: um estudo dos "Exames de Admissão" de Carlos Góes
Autor	Alana G. Lacava	Alana G. Lacava e David A. da Costa	Elenice de S. L. Zuin
Livro	Arithmetica da Infancia, 1980	Arithmetica Primaria, 2ª edição, 1902	Exames de Admissão ao Collegio Pedro II e Gimnasios Equiparados, 1930
Autor	Dr. Joaquim M. de Lacerda	Cezar Pinheiro	Carlos Góes
Publicado	Paris e RJ	Pará - PA	SP, MG e RJ
Destino	Ensino primário	Grupos escolares	Exames de admissão

⁷ Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática (<https://ghemat-brasil.com.br/home/>).

Conteúdos de interesse apresentado	"Taboada" com nove-fora	-	-
	As 4 operações fundamentais da aritmética	As 4 operações fundamentais mais potenciação e radiciação	As 4 operações fundamentais da aritmética
	Prova real para todas as operações	Prova real para todas as operações (exceto divisão)	Apenas o enunciado da prova real para todas as operações
	Prova dos nove para todas as operações	Prova dos nove para todas as operações (exceto divisão)	Prova dos nove para todas as operações (enunciado e indicação)
Método	Explicação detalhada da verificação da prova real e da prova dos nove com exemplos numéricos	1-Exposição detalhada das duas provas com exemplos numéricos 2-NÃO há explicação de regra para as provas real e dos nove para divisão, apenas é indicada no exemplo	1-Exposição detalhada das duas provas com exemplos numéricos apenas para adição 2-Detalha e exemplifica a prova real da subtração 3-Enuncia, sem exemplos, a prova real para a multiplicação e divisão 4-Apenas enuncia e indica, em exemplo, a prova dos nove para subtração, multiplicação e divisão
QUANTO A PROVA DOS NOVE			
Definição	Como modo de verificação	Como uma regra	Como regra (conclusão por inferência)
Confiança segundo o autor	"Póde-se supôr que está correta" (LACERDA, 1890, p. 12)	"De resultados (sic) as vezes negativos" (PINHEIRO, 1902, p. 12)	"Deve estar certa" (GÓES, 1930, p. 58)
Exercícios	Há um questionário teórico e um conjunto de 19 problemas ao final do tópico "As quatro operações fundamentaes" mas, apenas o questionário contempla a prova dos nove	Não há indicação de exercícios	Há, ao final da parte dedicada à Aritmética, 58 problemas, mas que não fazem referência a prova dos nove

Fonte: acervo do autor

5 Considerações finais

Esta revisão textual buscou evidenciar a origem, ascensão e abandono do conteúdo “a prova dos nove” como um saber de grande relevância no passado da educação brasileira. A estratégia para isso foi a procura de pontos alinhados nos artigos de (Lacava, 2019; Lacava e Costa, 2016; e Zuin, 2019), pesquisas que trataram com esmero esse assunto, também foram analisados os respectivos livros-fonte que subsidiaram tais pesquisas e que podem ser encontrados no acervo do RCD da UFSC.

Ancorados no Quadro 1, constata-se que tanto a prova real quanto a prova dos nove serviam de base para a verificação das quatro operações fundamentais da aritmética. Apenas no Livro “Arithmetica Primaria” de Pinheiro (1902), sem justificativas, o autor não menciona regras de prova para a divisão, consta apenas um exemplo com uma indicação simbólica da “prova dos nove”. Em contrapartida, o autor acrescenta a prova real para a potenciação e radiciação como pode ser observado às páginas 22-23 dessa obra.

Embora constem a prova real e a prova dos nove em todas as obras pesquisadas, é importante destacar a unanimidade dos autores com relação a insegurança da prova dos nove para verificação de cálculos aritméticos. Fato que não diminuía o *status* dessa prova.

Depreende-se das pesquisas, que os livros em voga eram destinados ao ensino nos anos iniciais da escolarização infantil (curso primário), permitindo-nos inferir que por décadas o aprendizado da prova dos nove foi oportunizado e cobrado a diversas gerações de brasileiros, por exemplo, para o aluno ascender ao curso secundário⁸ era lhe exigido, legalmente, aprovação no exame de admissão.

Constata-se ainda nessas obras uma abordagem de ensino conteudista com temas deveras enrijecidos, centrada apenas em descrição de regras, exemplos e poucos exercícios. Essa constatação vinculada a falta de problematização dos assuntos para reforço da aprendizagem e desenvolvimento cognitivo do aluno, revela que o foco de tais obras era o professor primário, sob a responsabilidade de quem recaia a obrigação do planejamento dessa tarefa.

Assim, constatou-se que no Brasil a prova dos nove foi detalhada por estudiosos escritores, normatizada por leis, estabeleceu-se como conteúdo primário e frequentou as salas de aula por mais de um século, antes de sucumbir.

⁸ O curso secundário compreendia as quatro séries do ensino ginásial e as três do colegial.

Podemos inferir também, que o destaque negativo de autores renomados como Trajano, já referenciado anteriormente, dado a não confiabilidade da prova dos nove para verificação de operações aritméticas, teve contribuição gradativa nessa fuga.

Como mencionado são apenas conjecturas, mas que podem servir a problematização de novas pesquisas sobre esse tópico dentro da história da educação matemática. Como argumenta Bunge todo objeto é, em princípio, valioso como assunto de possível conhecimento, mais ainda, “para o ser humano, conhecer é vitalmente tão necessário quanto se alimentar, agasalhar-se, defender-se, ser útil, amar e ser amado” (BUNGE, 1980, p. 201).

6 Referências

B. BOYER, Carl. **História da Matemática**. Uta C. Merzbach. Trad.: Helena Castro. São Paulo: Ed. Blucher, 2012, 504p.

BEZERRA, S. Como me tornei professora de matemática: memórias resgatadas através da história da educação matemática. **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM)**, 2013, Curitiba. Anais... Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2013.

BUNGE, Mario. **Epistemologia: curso de atualização**. Tradução de Claudio Navarra – São Paulo: T.A. Queiroz. Editora da Universidade de São Paulo, 1980.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007, 654p.

ESQUINA, J. C. P. **Aritmética: códigos de barras e outras aplicações de congruências**. 130f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad.: Higyno H. Domingues, 2. ed. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2004, 844p.

GÓES, C. **Exames de admissão**. Belo Horizonte: Horácio Belfort Sabino, 1930. v.1. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/159283>. Acesso 05 de setembro, 2021.

LACAVA, A. G. Arithmetica da Infancia (1890) de José Maria de Lacerda e o conteúdo da prova dos nove. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 5, n. 1, p. 106-117, 2016. ISSN 2358-4750.

LACAVA, A. G.; COSTA, D. A. A prova dos nove e o caso da “Arithmetica Primária” de Cezar Pinheiro. **Revista de Matemática Ensino e Cultura – REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.11, n. 1, p. 54-73, 2016.

LACERDA, J. M. **Arithmetica da infância**. 1890. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/100349>. Acesso 30 de agosto, 2021.

MIGUEL, A. Percursos Indisciplinares na Atividade de Pesquisa em História (da Educação Matemática): entre jogos discursivos como práticas e práticas como jogos discursivos. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35A, p. 01-57, abril, 2010.

OLIVEIRA, A.; LUTOSA, L. A prova dos nove. **Caderno Dá licença**. Universidade Federal Fluminense, Niterói (RJ), vol. 1, Ano 1, dez/1998.

PINHEIRO, C. **Arithmetica Primaria**. 2 ed. Pará: Livraria Moderna, 1902. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/134440>. Acesso 05 de setembro, 2021.

RIBEIRO, D. M. A preparação de aulas usando história da Matemática. **Revista de Matemática Ensino e Cultura - REVEMAT**. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal (RN), ano 9. n. 16, p. 148-163, mai./ago., 2014.

RODRIGUES, F. W. A Prova dos nove. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, n. 14, p.17-20, 1989.

TRAJANO, Antonio. **Arithmetica Elementar**. 68. ed. Rio de Janeiro: Typographia Martins de Araújo & C., s.d.

ZUIN, E. S. L. Revisitando a Prova Real e a Prova dos Nove: um estudo dos “exames de admissão” de Carlos Góes. **Revista VIDYA**. Santa Maria (RS), v. 39, n. 2, p. 527-544, jul./dez., 2019. ISSN 2176-4603.