ACERVO
BOLETIM DO CENTRO DE DOCUMENTAÇÃO DO GHEMAT-SP

LIMITES: UMA BREVE PASSAGEM NOS LIVROS BRASILEIROS DO ENSINO SECUNDÁRIO

LIMITS: A BRIEF PASSAGE IN BRAZILIAN SECONDARY SCHOOL TEXTBOOKS

Circe Mary Silva da Silva 1[1]
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0002-4828-8029

Submetido: 01 de março de 2023 **Aprovado:** 13 de março de 2023

RESUMO

RESUMO: No Brasil, no século XX, o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) foi ensinado no curso secundário, em conformidade com as reformas educacionais, a de Francisco Campos e a de Gustavo Capanema ocorridas, respectivamente em 1931 e 1942. O objetivo da pesquisa[2] foi identificar as abordagens metodológicas do conceito de limite em livros didáticos de matemática para o ensino secundário no período de 1940 a 1970. As cinco coleções de livros analisadas foram as dos autores: Thales Carvalho; Algacyr Maeder; Jairo Bezerra; Ary Quintella; Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto. O marco inicial foi quando livros específicos com o CDI foram editados para o ensino secundário e o marco final – na década de 1970- foi quando o CDI deixou de ser indicado oficialmente e começou a desaparecer do currículo dessa modalidade de ensino. O método investigativo de cunho qualitativo adotado na pesquisa foi a análise documental. Apoiados em Borel, Poincaré, Klein e Tall, analisamos, nos enunciados de cada livro, as regularidades referentes ao conceito de limite e a sua articulação com conceitos correlatos, culminando na identificação da abordagem metodológica usada pelos autores. As categorias de análise foram: abordagem formal simbólica; abordagem formal mesclada com corpóreo simbólica e abordagem corpóreo simbólica. Concluímos que apenas um dos autores escolheu a abordagem formal simbólica, para tratar dos conceitos de limite de sucessão, limite de variável e limite de função.

ABSTRACT/ RESUMEN/ RÉSUMÉ

ABSTRACTIn Brazil, in the 20th century, Differential and Integral Calculus (DIC) was taught in secondary school, in accordance with the educational reforms, those of Francisco Campos and Gustavo Capanema, respectively in 1931 and 1942. The objective of the research was to identify the methodological approaches to the concept of limit bin mathematics textbooks for secondary education in the period from 1940 to 1970. The five collections of books for secondary education analyzed were those of the following authors: Thales Carvalho; Algacyr Maeder; Jairo Bezerra; Ary Quintella; Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha and Cesar Dacorso Neto. The initial milestone was when specific books with the DIC were published for secondary education and the final milestone - in the 1970s - was when the DIC was no longer officially indicated and began to disappear from the curriculum of this type of teaching. The qualitative investigative method adopted in the research was document analysis. Supported by Borel, Poincaré, Klein and Tall, we analyzed, in the statements of each book, the regularities referring to the concept of limit and its articulation with related concepts, culminating in the identification of the methodological approach used by the authors. The categories of analysis were: symbolic formal approach; formal approach mixed with symbolic body and symbolic body approach. We conclude that only one of the authors chose the formal symbolic approach to deal with the concepts of succession limit, variable limit and function limit.

[1] Doutora em Pedagogia (Universidade de Bielefeld). Professora voluntária do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas. Rua Gomes Carneiro n. 1, Centro, Pelotas (RS) Brasil, cep: 96010-610. E-mail: cmdynnikov@gmail.com
[2] Pesquisa financiada pelo CNPq. Faz parte do projeto: O Cálculo Diferencial e Integral: uma análise das tentativas de sua escolarização.

Palavras-chave: Livro didático; Matemática; Limite; Intuição; Formalismo.

Keywords: Textbook; Mathematics; Limit; Intuition; Formalism

CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

> "Parece-me que estou viajando numa canoa, entre vagas verdes que ondeiam até o limite do horizonte" (COUTO, 2016, p. 167).

Na epígrafe acima, Mia Couto, valendo-se da linguagem poética, utiliza a palavra limite com um significado distinto – e também distante – daquele que lhe é atribuído na matemática: o limite que não se atinge. Clarice Lispector (1967, p. 174), valendo-se da linguagem poética, por outro lado, percebe o limite como algo atingível ao dizer: "Há um limite de se ser. Já cheguei a esse limite". Por sua vez, Tolstói (2020, p. 601), em Guerra e Paz, usa a palavra limite com outro significado - algo que não pode ser ultrapassado: "As duas faziam um esforço enorme para não cruzar o limite que as fazia lembrar-se do falecido". Érico Veríssimo (1967, p. 387), em sua obra, empregou muitas vezes a palavra limite, no livro *O tempo e o Vento*, escreveu: "A curiosidade das moças de hoje não tem limites". O que dá uma ideia de infinitude. Tolstói remete à contenção, já Érico sugere o extrapolamento. Na linguagem usual, a palavra limite pode ser entendida como uma fronteira, uma barreira, como a proximidade de algo, um ponto de chegada, um lugar ou tempo que ainda não atingimos ou que já alcançamos. Para Aristóteles, limite é o "último ponto além do qual não existe parte alguma da coisa e aquém do qual estão todas as partes dela" (ABBAGNANO, 2007, p. 614). Na literatura, na filosofia, na matemática, o conceito de limite, essa palavra polissêmica, se faz presente, cada qual com seu significado. No entanto, no ensino da matemática, precisamos estar atentos, para que o seu uso não conduza a ambiguidades.

Atualmente, os conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) - como limite, derivada, continuidade e integral - não fazem parte dos assuntos abordados no ensino médio (BRASIL, 2018). Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na unidade "Número e Álgebra", há referência à interpretação de problemas, que envolvem taxa de variação; entretanto não aparece explicitamente o conceito de função derivada ou de variabilidade de uma função. Em relação à isso, o Brasil difere de muitos outros países, como, por exemplo, Portugal, em que o CDI aparece no Programa e Metas Curriculares Matemática A - ensino secundário (2014), previsto para o 11º e 12º ano escolar (FALLAS, 2016). Sendo assim, no caso brasileiro, por que então pesquisar sobre tal conceito em livros didáticos do século passado? O fato desse conhecimento não mais integrar o atual currículo, não nos dispensa de estudá-lo, pois as mudanças ou reformas do ensino são propostas políticas e pedagógicas apoiadas em ideologias e os argumentos que as sustentam podem ser questionados, principalmente, quando se realiza estudos comparativos internacionais.

Uma visita ao passado de nossa cultura escolar – que livros didáticos de então podem nos ensejar - nos dar indícios de propostas de abordagem do conceito de limite que ainda poderiam ser objeto de estudo no ensino médio e em cursos de pré-cálculo no ensino superior. Além disso, pesquisadores da Educação Matemática têm realizado experiências com o ensino do CDI na educação Básica como está relatado por (ORFÃO; COSTA; FRANT, 2011; ARAUJO, 2015: MOLON e FIGUEIREDO, 2015; FALLAS, 2016; SOUZA, 2019): some-se a isso o fato de haver professores de matemática que, há longo tempo, defendem o retorno de ideias introdutórias do CDI no ensino básico no Brasil (ÁVILA, 1991; ÁVILA, 2006; MACHADO, 2008; SILVA e SOUZA, 2014; SILVA, 2016).

Embora o conceito de função seja o conceito central na matemática, existe um outro conceito que, realmente, introduz o aluno num nível de pensamento matemático mais avançado – o conceito de limite (TALL, 1992). Os conceitos matemáticos avançados são “[...] aqueles que se focam essencialmente nas abstrações de definições e deduções e que têm por base os processos de representação e abstração” (DOMINGOS, 2003, p. 53). Baseado em Vinner (2001), Domingos afirma que quando os alunos ingressam no estudo de conceitos mais avançados, é importante que a definição seja “introduzida como o último critério das várias tarefas matemáticas”.

Este conceito desafiou mentes de brilhantes matemáticos desde a antiguidade até o século XIX e ainda permanece misterioso para os iniciantes, uma vez que ele não surge por meio de cálculos, como na aritmética.

O conceito de limite é uma boa mónada[3] para ser objeto de análise, uma vez que existem grandes conflitos cognitivos na sua aprendizagem, e para Tall (1992), embora as definições formais de limite sejam eficazes do ponto de vista da lógica, elas são pouco apropriadas no desenvolvimento curricular, pois podem trazer alto risco de conflitos cognitivos para os estudantes.

[3] Mónada, conforme Leibniz, não é outra coisa senão uma substância simples, que entra nos compostos; simples, que dizer, sem partes. (Leibniz, Monodologia, Lisboa: Edições Colibri, 2016).

Tall (2002) faz um retrospecto sobre o ensino do CDI afirmando que este tradicionalmente se concentrava nas ideias gráficas de taxa de variação e crescimento cumulativo e, também, na manipulação simbólica de regras de derivação e integração. Ele acreditava, porém, que nos estágios iniciais do ensino poderiam ser introduzidas ideias não formais desse conceito.

Será que isso também ocorria em livros didáticos no ensino secundário brasileiro? Será que neles poderemos encontrar raízes ou opções metodológicas que os autores conceberam como adequadas para apresentar aos jovens iniciantes o conceito de limite?

O CAMINHO DA PESQUISA

O objetivo da presente investigação é identificar as abordagens metodológicas do conceito de limite apresentadas por autores de livros didáticos de matemática para o ensino secundário no período de 1940 a 1970. Os livros didáticos escolhidos estão entre aqueles escritos exclusivamente para essa modalidade escolar, os quais seguiram os programas oficiais e foram publicados no período de 1940 a 1970. Cinco livros didáticos de matemática escolhidos cumpriram os critérios para serem analisados (Quadro 1). Os pontos de interrogação nas datas significam que se desconhece o ano exato, mas, apenas a década em que foram editados.

Quadro 1: Relação de Autores e respectivos livros editados

Autor/ Autores	**Título**	**1ª Edição**	**Edição e ano- obra analisada**
Thales de Faria Mello Carvalho	Matemática para os cursos clássico e científico – 3º ano	1943	5ª; 1955
Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto	Matemática 2º Ciclo – 3ª série	194?	4ª; 1955
Algacyr Munhoz Maeder	Curso de Matemática – 3º livro – ciclo colegial	1944	5ª; 1955
Manoel Jairo Bezerra	Curso de Matemática para os primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico	1953	10ª; 196?
Ary Quintella	Matemática – terceiro ano colegial	195?	12ª; 1965

Fonte: dados trabalhados pela autora

A revisão das pesquisas concluídas sobre esses livros didáticos indicou, entre os principais trabalhos, os seguintes autores e títulos: Adilson Longen – *Livros didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da educação matemática*. Tese. Doutorado em Educação. Universidade Federal do Paraná, 2007. Denise Franco Capello Ribeiro – *Um estudo da contribuição de livros didáticos de Matemática no processo de disciplinarização da matemática escolar do colégio -1943 a 1961*. Tese. Doutorado em Educação Matemática. PUC-SP, 2011. Maryneusa Cordeiro Otone – *História da constituição da matemática do colégio no cotidiano escolar*. Tese. Doutorado em Educação Matemática. PUC-SP, 2011. Carlos Augusto Santos Carvalho – *Aspectos relevantes para uma história da evolução do currículo de Matemática na segunda metade do século XX- o caso do Colégio de Aplicação da UFRJ*. Diss. Mestrado em Ensino da Matemática, UFRJ, 2012.Francisco de Oliveira Filho – *A Matemática do Colégio: livros didáticos e história de uma disciplina escolar*. Tese. Doutorado em Educação Matemática. Universidade Anhanguera, 2013.

Os pesquisadores acima indicados abordaram em suas investigações, parcialmente ou na totalidade, os mesmos livros didáticos por nós selecionados. Forneceram indicações do número e anos das edições dos livros, forneceram dados sobre sua utilização, conteúdos abordados, metodologia. Ribeiro (2011, p. 242) concluiu não ter encontrado “[...] indícios da presença de todas ideias inovadoras para o ensino da matemática, defendidas por Roxo” como o conceito de função como eixo integrador, aplicações da matemática, uso de recursos de laboratório, etc. Em nenhum deles, o conceito de limite foi investigado de maneira comparativa. Nesse sentido, o nosso trabalho complementa e amplia os estudos anteriores.

No presente estudo, o método investigativo de cunho qualitativo utilizado foi a análise documental. Identificamos, nos enunciados de cada livro, as regularidades referentes ao conceito de limite e a sua articulação com conceitos correlatos, culminando na categorização da abordagem metodológica usada pelos autores. Utilizamos o paradigma interpretativo para a análise das abordagens dos cinco autores, procurando entender a sequência de apresentação e introdução de cada conceito. Este paradigma apela à interpretação, clarificação e descrição dos conceitos utilizados pelos autores dos livros.

Os livros didáticos foram as principais fontes de coleta de dados para a pesquisa. Assim, para a análise de documentos, foram propostas categorias de análise para identificar a metodologia de introdução do conceito de limite. As categorias de análise escolhidas foram as seguintes: abordagem formal simbólica; abordagem formal mesclada com corpóreo simbólica e abordagem corpóreo simbólica. Com o objetivo de interpretar essas abordagens, recorremos a alguns autores que abordaram esse assunto como: Borel, Poincaré, Klein e Tall.

No início do século XX, a revista *L'Enseignement Mathématique*, criada por Charles Laisant e Henri Fehr, trouxe à tona amplas discussões sobre o ensino da matemática, em especial, no caso que estudamos, sobre a pertinência do ensino do CDI no ensino secundário. Os anais da Conferência Internacional do ensino da Matemática, realizada em Paris, em 1914, publicados nessa revista, contemplam a palestra do matemático Émile Borel (1872-1956), professor da Faculdade de Ciências de Paris, com o título *A adaptação do ensino secundário ao progresso da ciência.* Nessa oportunidade, ele defendeu, amplamente, o ensino do CDI no curso secundário. “Nós estamos acostumados a qualificar certas porções da matemática como superiores, em oposição ao elementar; destes são o Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, cujo nome por si só inspira algum medo entre os leigos”. Ele prossegue argumentando que: “Essas disciplinas temidas estão, pelo menos em seus elementos, muito mais próximas das noções simples de cálculo que se adquire no ensino fundamental, do que muitas considerações sobre os volumes de corpos redondos [...]”. Borel exemplifica, dizendo que poderíamos ensinar nossos alunos “olhando para gráficos como os jornais diários costumam publicá-los; sem saber, eles estão fazendo Geometria Analítica; às vezes até, discutindo a maior ou menor velocidade das oscilações desses gráficos e as consequências que podem ser extraídas deles, eles fazem, sem saber, Cálculo Diferencial e Cálculo Integral” (BOREL, 1914, p. 205-207).

Preocupados com o ensino da matemática e alinhados à Borel, estão outros matemáticos, entre os quais podemos citar Henri Poincaré (1854-1912) e Felix Klein (1849-1925). Transcorreram mais de cem anos desde que o matemático Poincaré escreveu seus significativos trabalhos sobre a Filosofia da Ciência, os quais não perderam sua pertinência, pois eles nos provocam à reflexão e continuam a nos orientar nas pesquisas. As questões referentes ao ensino da matemática eram cruciais para Poincaré, porque elas permitiam refletir sobre a melhor maneira de fazer penetrar noções novas nos “cérebros virgens”; ele também procurava entender como essas noções foram construídas pelos que nos antecederam. Ao questionar o que é uma boa definição, ele respondeu assim: “Para o filósofo ou o cientista, é uma definição que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e se aplica apenas a eles; é aquela que satisfaz as regras da lógica. Mas na educação não é assim; é aquela definição que pode ser compreendida pelos alunos” (POINCARÉ, 1908, p. 129). Ao comentar sobre as definições com pouco “rigor”, em livros didáticos, ele dizia:

> Não devemos condená-los por isso; eles atenderam a uma necessidade; os iniciantes não estão preparados para o verdadeiro rigor matemático; só veriam nisso vãs e fastidiosas sutilezas, perderíamos nosso tempo se quiséssemos, cedo demais, torná-los mais exigentes [...] (POINCARÉ, 1988, p. 23).

Klein, contemporâneo de Poincaré, compartilhava de suas ideias. Segundo Klein, para Poincaré, "a estabilidade de toda estrutura matemática se baseia na intuição, no mais amplo sentido da palavra" (KLEIN, 2009, p. 16). A proposta de Klein de trazer uma matemática superior para o ensino secundário não significava que ela deveria estar vestida de uma linguagem rigorosa, ao contrário, a instrução nas escolas secundárias, segundo o que sugeria para o conceito de função, "[...] não deveria ser introduzida por meio de definições abstratas, mas deveria ser introduzida como uma propriedade viva, por meio de exemplos elementares [...]" (KLEIN, 1945, p. 205). Ele recorreu à História da Matemática para mostrar como conceitos fundamentais do CDI poderiam ser introduzidos. Buscou em Newton uma inspiração ao comentar que o matemático inglês desenvolveu o novo cálculo em numerosos exemplos, sem entrar em explicações sobre os seus fundamentos. Ele fez conexão com um fenômeno da vida, quando sugeriu a passagem ao limite, trazendo o movimento de um objeto x no tempo t. "Se analisarmos este movimento, entende-se o que queremos dizer com limite do quociente $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Newton fez isso para a velocidade de x em relação ao tempo t com base em seus desenvolvimentos" (KLEIN, 1945, p. 212).

Estes pensadores iluminam o túnel que precisamos cruzar na interpretação de nossos dados – clarificar como o conceito de limite foi definido, apresentado, justificado, exemplificado pelos autores selecionados.

A teoria dos três mundos conceituais da Matemática, do pesquisador David Tall (2013), contribui com a teoria de aprendizagem matemática, ao propor que o pensamento matemático pode ser visto sob três aspectos: 1) mundo corpóreo (*embodied*), relacionado às características físicas dos objetos matemáticos, é um mundo de significado sensorial; 2) mundo simbólico é aquele relacionado às características dos objetos nas palavras tradicionais e familiares onde os cálculos podem ser feitos (ambos aritméticos e algébricos), e 3) mundo axiomático formal, relacionado ao formalismo matemático dos conceitos. A figura 1 exemplifica os três mundos da matemática conforme proposto por Tall.

Figura 1: Os três mundos da matemática (exemplo: números reais)

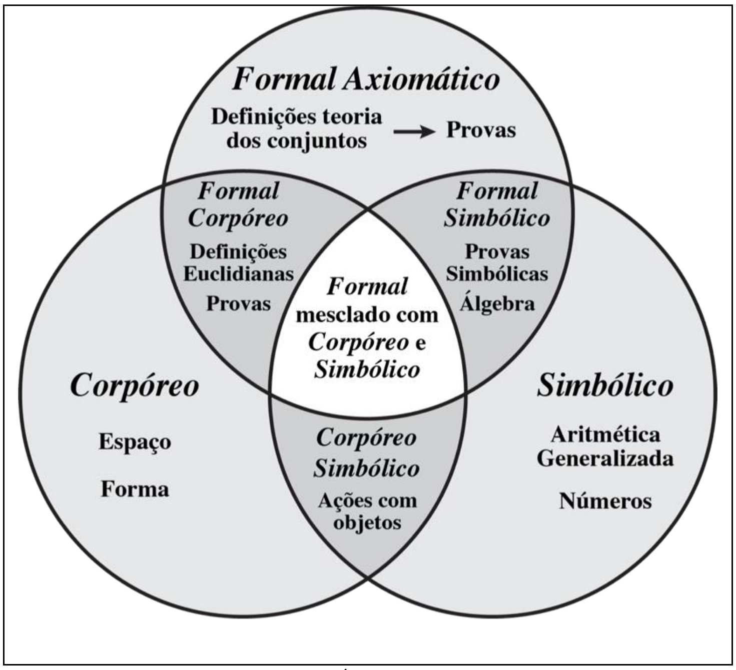
Fonte: Adaptação da figura 1.7, Tall, 2013.

O sistema numérico real é uma mistura de corpóreo, simbolismo e formalismo em que cada um contribui com diferentes aspectos para a nossa compreensão do número (Figura 1). Para Tall (2013), o desenvolvimento do pensamento matemático passa por três mundos e tem base no reconhecimento humano, repetição e linguagem para evoluir através da percepção, operação e razão.

Segundo Tall (2013, p. 24), para o desenvolvimento do pensamento matemático é preciso comprimir e conectar o conhecimento em diferentes estruturas de conhecimento. "Nossos cérebros biológicos evocam conceitos pensáveis por uma ligação seletiva de estruturas neurais envolvendo uma gama de sentidos e percepções".

O esquema da figura 2 é uma adaptação da figura 15.1, onde Tall, avança de sua formulação de 2002 e mostra que os três mundos não são estanques, mas se mesclam.

Figura 2: Os três mundos da matemática ampliados



Fonte: Adaptação[4] da figura 15.1 (Tall, 2013)

Da matemática prática - formada por números, formas e espaço - o pensamento progride para uma matemática teórica da álgebra e geometria euclidiana. "Enquanto a geometria se constrói através do aumento da sofisticação estrutural, o simbolismo se desenvolve através da compressão operacional das operações incorporadas ao simbolismo manipulável que então tem propriedades estruturais que desenvolvem suas próprias formas de definição e prova" (TALL, 2013, p. 402-403). Finalmente, o terceiro mundo da matemática formal axiomática constrói um nível formal baseado na teoria dos conjuntos e nas demonstrações formais.

Nos estágios posteriores da escolaridade (ensino secundário) ou no primeiro ano de faculdade, os estudantes de matemática são apresentados às ideias do cálculo. A abordagem tradicional é uma mistura de geometria, aritmética e álgebra, para encontrar a inclinação de uma função y= f(x), de x para x+h tal que para a nova função $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ precisa-se calcular o limite quando h fica pequeno. Tall explica o quão problemática foi para Newton e Leibniz essa quantidade tornar-se arbitrariamente pequena.

Para Tall (2002), uma abordagem corpórea do cálculo se concentra em ideias perceptivas fundamentais antes de introduzir qualquer tipo de simbolismo. No ensino, não começamos com ideias formais de limites, mas com ideias corpóreas de representações gráficas de funções. Ele

[4] Desenho: Johny Dirlei da Silva Acosta

exemplifica: “[...] a inclinação de um gráfico tempo-distância é uma velocidade, e a inclinação de um gráfico tempo-velocidade é uma aceleração, então nos concentramos nos sentidos incorporados de distância, velocidade e aceleração, em vez da matemática subjacente mais simples que cada uma é obtida da anterior como a inclinação de seu gráfico” (TALL, 2002, p. 12).

Outra observação interessante de Tall (2002, p. 7) diz respeito às duas fases de contato com o limite: aquela da definição formal e a operacional. Para ele,

> A introdução do conceito de limite traz uma ideia de um cálculo que é potencialmente infinito, de modo que a maioria dos estudantes acredita que tal fenômeno 'continua para sempre', sem que todos cheguem ao valor limite. Mais uma vez, isso provoca dificuldades universais para os alunos. É com algum alívio que eles encontram as 'regras do cálculo' novamente operacionais, embora com entrada e saída simbólicas e não numéricas.

Tall (2002) defende que uma mescla da operação corpórea e simbólica é apropriada para o ensino do CDI para um espectro mais amplo de alunos, enquanto o modo formalizado deve ser adiado para um curso de Análise (ensino superior).

A proposta teórica de Tall (2002) é interessante e nos sugeriu as seguintes categorias de análise para a abordagem do conceito de limite: abordagem formal simbólica; abordagem formal mesclada com corpóreo simbólica e abordagem corpóreo simbólica.

A fim de entendermos porque os autores selecionados para análise escreveram livros didáticos de matemática com conceitos de CDI, faremos um breve retrospecto das reformas educacionais ocorridas no período de 1940 a 1970.

Félix Klein foi um grande incentivador de mudanças no ensino secundário e suas ideias ultrapassaram fronteiras e chegaram ao Brasil. A seguir veremos como a proposta deste matemático foi apropriada no ensino secundário por meio de reformas educacionais.

Reformas do Ensino Secundário (1940-1970)

No governo de Getúlio Vargas, na década de 1930, foi criado o Ministério da Educação e Saúde e Francisco Campos, foi o primeiro ministro nomeado para esse ministério, conforme Dallabrida (2009, p. 185),

> A chamada “Reforma Francisco Campos” (1931) estabeleceu oficialmente, em nível nacional, a modernização do ensino secundário brasileiro, conferindo organicidade à cultura escolar do ensino secundário por meio da fixação de uma série de medidas, como o aumento do número de anos do curso secundário e sua divisão em dois ciclos, a seriação do currículo, a frequência obrigatória dos

> alunos às aulas, a imposição de um detalhado e regular sistema de avaliação discente e a reestruturação do sistema de inspeção federal.

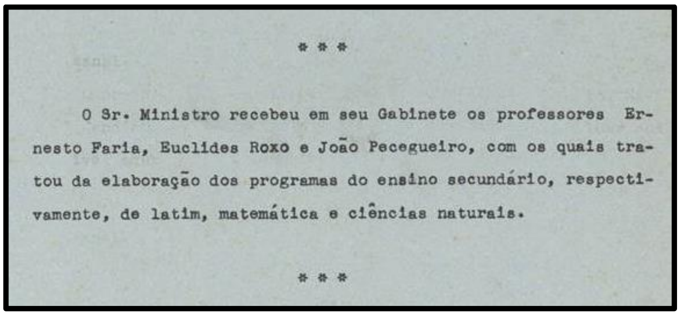
No Decreto 19.800 de 1931, que dá as diretrizes para cada disciplina escolar, transparecem as ideias de Felix Klein, as quais foram divulgadas no Brasil pelo educador Euclides Roxo, então professor catedrático e Diretor do Externato do Colégio Pedro II. Foi ele quem propôs à Congregação desse Colégio a criação da disciplina Matemática, oriunda da junção das disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria, que até então eram ensinadas em separado, cada uma das quais contando com livros didáticos distintos. Essa proposta ocorreu em 1927 (DUARTE, 2021). Euclides Roxo participou da elaboração das diretrizes referentes à disciplina de matemática.

Devido a sua importância histórica, transcreveremos uma longa citação referente à disciplina matemática, chamada aqui de matéria:

> Para dar unidade à matéria, estabelecendo-se essa estreita correlação entre as diversas modalidades do pensamento matemático, será adotada, como ideia central do ensino, a noção de função, apresentada, a princípio, intuitivamente e desenvolvida nas séries sucessivas do curso, de modo gradativo, tanto sob a forma geométrica como sob a analítica. Como um desenvolvimento natural do conceito de função, será incluída na 5ª série o ensino das noções fundamentais e iniciais do cálculo das derivadas, tendo-se não só em vista a sua aplicação a certas questões, geralmente tratadas em matemática elementar por processos artificiais, como ainda aos problemas elementares da mecânica e da física (BRASIL, 1931, p. 12.413).

Gradativamente, os professores começaram a escrever livros didáticos para a nova disciplina e Euclides Roxo foi um deles. Em 1934, foi nomeado um novo ministro da Educação - Gustavo Capanema - que ficou no cargo até 1945. Ele elaborou a Lei Orgânica do Ensino Secundário (Decreto-Lei 4244 de 9 de abril de 1942) que ficou conhecida como Reforma Capanema. Para o ensino secundário, dois ciclos foram estabelecidos: o primeiro, ginasial, com 4 anos de duração, e o segundo, o clássico e científico, com duração de 3 anos. Para o 3ª ano, na disciplina de matemática para o curso científico, na parte de álgebra estava previsto o tópico funções: noção de função e de variável real, representação cartesiana, noção de limite e continuidade; derivadas definição, interpretação geométrica e cinemática, cálculo das derivadas, derivação das funções elementares, aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples (BRASIL, 1943, p. 4). A participação de Euclides Roxo na elaboração dos programas de matemática é comprovada no Acervo Capanema, 1942.

Figura 3. Fragmento do Diário do Gabinete do Ministro Capanema (1942)



* * *

O Sr. Ministro recebeu em seu Gabinete os professores Ernesto Faria, Euclides Roxo e João Pecegueiro, com os quais tratou da elaboração dos programas do ensino secundário, respectivamente, de latim, matemática e ciências naturais.

* * *

Fonte: Acervo Gustavo Capanema (CPDOC, Fundação Getúlio Vargas), 8 de julho de 1942, p. 2. https://docvirt.com/docreader.net/DocReader.aspx?bib=ARQ_GC_F&hf=www.fgv.br&pagfis=22817

Os programas de matemática para o ensino secundário eram merecedores de pareceres de ministros. No acervo Capanema, encontra-se referência a uma carta (com os programas de matemática para os cursos clássico e científico) dirigida ao presidente da república, na qual se solicita o parecer do Ministro da Guerra sobre os programas (CAPANEMA, 1942, p. 46).

Desde a Lei de Diretrizes e Bases de 1961, que incumbiu ao Conselho Federal de Educação (CFE) a elaboração de novos programas para a disciplina de matemática (entre outras), o CDI vai progressivamente desaparecendo dos programas, porque o CFE não cumpriu com sua tarefa, qual seja, elaborar os programas de matemática (SILVA; SCHUBRING, 2016). Gradativamente, os conteúdos de CDI cedem espaço nos programas aos novos conteúdos da Matemática Moderna, que começam a ser incluídos nos livros didáticos.

A partir da década de 1940, professores produzem livros didáticos de matemática destinados ao ensino secundário em conformidade com a Reforma Capanema. Nos prefácios, há indicação de que os livros seguem os programas oficiais. Esses livros, que incluem o CDI, foram editados até o final da década de 1970.

UMA INTERPRETAÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE NOS LIVROS DIDÁTICOS

Cada autor escolheu uma maneira de apresentar o conceito de limite, provavelmente de acordo com sua experiência didática, baseado nos autores que leu, a partir de sua *Weltanschauung* (visão de mundo). Captar tudo isso apenas lendo o texto impresso não é tarefa simples, entretanto decidimos enfrentar o desafio.

Thales Carvalho (1915-1966) escreveu livros de recreação matemática; talvez por isso tenha sugerido que, ao introduzir definições, o professor fosse o menos formal possível, trazendo antes exemplos. É possível também que a leitura da obra de Felix Klein[5] (1908) o tenha influenciado. Conforme Oliveira Filho (2013), ele citou no seu livro *Lições de Matemática*, de 1938, em nota de rodapé, entre outros, o livro de Klein, que se tornou conhecido no Brasil por intermédio de Euclides Roxo, contemporâneo de Carvalho. Ali, no livro de Carvalho, o conceito de limite é apresentado de maneira progressiva e, para isso, ele introduz, entre outros, os seguintes conceitos, necessários para a definição do limite de uma função:

Conjuntos, conjunto infinito, intervalo, ponto de acumulação, sucessões, limite de uma sucessão, variável real, função, representação analítica de uma função, campo de existência de uma função, limite de uma variável, limite de uma função.

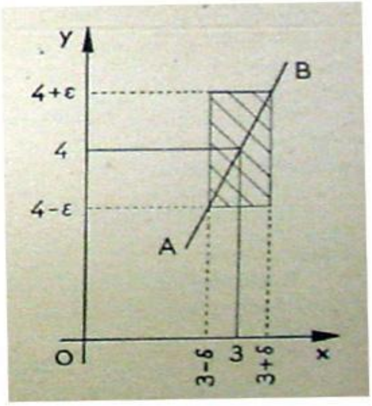
Além disso, são apresentadas três definições de limite: para sucessão, variável e função. Inicia pelo exemplo da sucessão, cujo termo geral é $\frac{n}{n+1}$, discutindo numericamente como ela se comporta e conclui que a sucessão converge para 1 ou que tem limite 1. Na sequência, faz a apresentação formal da definição de limite de sucessão: "Diz-se que uma sucessão $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ é convergente e tem para limite L, se escolhido arbitrariamente um número positivo ε, existe um número natural N, tal que, para n≥N, se tenha $|L - a_n| < \varepsilon$ " (CARVALHO, 1955, p. 26). Dedica ao conceito de variável longa discussão, trazendo a noção de variabilidade em fenômenos físicos, como a temperatura da água. Da mesma maneira, apresenta o conceito de função como dependência entre varáveis e exemplifica algebricamente com a função y=2x. O limite de uma variável é assim expresso: "Suponhamos que uma variável x assuma sucessivamente os valores a_1, a_2, ..., a_n, ... de um conjunto numerável de elementos de seu domínio C. Se a sucessão é convergente, isto é, tem um limite finito **a** diz-se que a variável x tem limite **a** e escreve-se lim x = **a** ou x→**a** ", segue uma definição formal de limite de variável: "Uma variável x tem um limite finito **a**, se o valor absoluto da diferença a-x pode tornar-se inferior a qualquer número positivo ε , arbitrariamente escolhido ou $|a - x| < \varepsilon$ " (CARVALHO, 1955, p. 43).

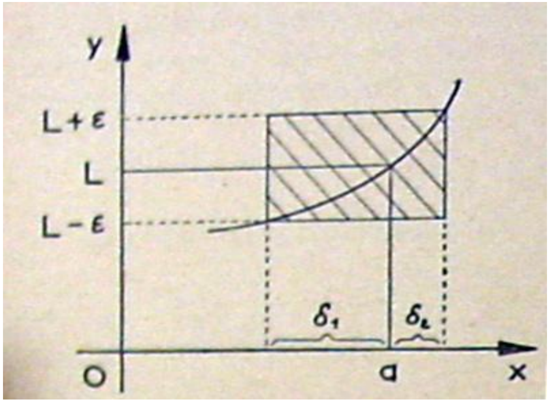
A fim de definir limite de uma função, inicia com um exemplo - a função f(x)=2x-2 - atribui valores numéricos que se aproximam de 3, tanto maiores quanto menores e chega a

[5] A edição citada é tradução para o inglês de Felix. Klein – "Elementary Mathematics from an advanced Standpoint" – Translated by Hedrick and Noble – N.Y. Macmillan – 1932 – p. 24" (Oliveira Neto, 2013, p. 191).

$f(x) = 4$. Para caracterizar com mais rigor, ele introduz o ε e δ e, além de detalhar a ideia usando a linguagem usual, ele apresenta os gráficos da figura 4.

Figura 4: Gráfico função f(x)= 2x-2 à esquerda e gráfico de limite finito à direita





Fonte: Carvalho, 1955, p. 45 e 46

Por fim, apresenta a definição formal de limite de função : "Diz-se que uma f(x) tem um limite finito **L** quando x tem um limite finito **a** e escreve-se $f(x) = L$, se escolhido arbitrariamente um número positivo ε, existe um número positivo δ tal que, para todo o valor x do intervalo (a-$\delta, a + \delta$) excluído no máximo o ponto x=a, se tenha $|L - f(x)| < \varepsilon$". (CARVALHO, 1955, p. 45-46).

Essa definição vem acompanhada de um gráfico. Ele apresenta também a definição para funções com limites infinitos.

Concluímos que o autor utilizou uma abordagem formal mesclada com corpóreo simbólica para introduzir o conceito de limite. Observamos, também, que seguiu a ideia de Felix Klein de usar exemplos antes de entrar com qualquer rigor matemático.

Algacyr Maeder (1903- 1975) escreveu 28 livros de matemática (LONGEN, 2007). O que foi por nós escolhido como objeto de análise o livro destinado ao o 3º ano do curso colegial, apresenta semelhanças com o de Thales, pois, também, inicia com uma ideia intuitiva de limite de sucessão. A ordem dos conceitos apresentada é a seguinte:

Sucessões, variável real, função, limite de uma sucessão, representação analítica de uma função, limite de uma variável, infinitamente pequenos, limites infinitos, limite de uma função.

Começa com o exemplo de um número fracionário periódico 0,99...; $a_1 = 0{,}9$; $a_2 = 0{,}99 \ldots a_n = 0{,}99 \ldots 9$ com **n** casas decimais e chega à conclusão de que lim (1- a_n) = 0. Traz um outro exemplo da Geometria: perímetro da circunferência por aproximação de polígonos inscritos. Entretanto, não introduz uma definição formal de limite de sucessão. Apresenta o número **e** como exemplo de uma sucessão cujo limite o gera. Introduz os conceitos de variável e função por meio de exemplos: considera o polinômio P(x)= $3x^2+2x+5$, com breve tabela x= -1, P(-1)=6; x=0, P(0)=5; x=1, P(1)=10; x=2, P(2)=21 , ... conclui que todo valor suscetível de variar, diz-se variável e o polinômio P(x) é uma função de x. O limite de uma variável é assim definido: "Seja C o campo de variabilidade de x, C conjunto de números. Diz-se que x tende para um número x_0 quando é possível valores satisfazendo à condição $|x - x_0| < \varepsilon$, para todo e qualquer número aritmético ε tão pequeno quanto quisermos" (MAEDER, 1955, p. 74) e, apresenta o limite de uma função. "Dada uma função y=f(x), definida num intervalo (a, b), dizer que $y = y_0$ equivale a afirmar ser possível a condição: $|y - y_0| < \delta$ para qualquer número aritmético δ, tão pequeno quanto desejarmos, desde que tomemos x suficientemente próximo de x_0" (MAEDER, 1955, p. 75).

A abordagem de Maeder é bem próxima àquela de Carvalho: usa exemplos para introduzir alguns conceitos, mas não o faz para introduzir a definição de limite de variável e de uma função, que é apresentado diretamente como definição formal. Maeder também enquadra-se na categoria de abordagem formal mesclada com corpóreo simbólica, embora tenda mais para o formal.

Jairo Bezerra (1920-1996), professor de matemática com bacharelado na Faculdade Nacional de Filosofia, escreveu 53 livros e foi premiado por seu livro *Didática Especial da Matemática* (CARVALHO, 2012). Ele seguiu a seguinte ordem de apresentação dos conceitos:

Variável, função, campo de existência de uma função, intervalo, sucessões, representação analítica de uma função, limite de uma variável, limite infinito, limite de uma função

Não há exemplificações; as definições são apresentadas de maneira formal. Ele apresenta a definição de função assim: "Diz-se que uma variável y é uma função de uma variável x, quando a cada valor de x corresponda, mediante uma certa lei, um ou mais valores de y" (BEZERRA, 196?, p. 165). Dá um único exemplo analítico de função linear e, logo após, a definição. O limite é apresentado da seguinte maneira.

> Seja y=f(x) uma função definida em um intervalo (a,b) e seja x_0 um ponto de (a,b). Diz-se que a função y tem um limite finito l, quando a variável x tende para x_0 se para cada número positivo **e**, existe em correspondência com **e**, um número **d** tal que para 0<$|x - x_0| < \boldsymbol{d}$ se tenha $|f(x) - l| < \boldsymbol{e}$. Indica-se essa definição com a notação $f(x) \ = \boldsymbol{l}$ (BEZERRA, 196?, p. 179).

Na introdução de limite diz tratar-se de um dos conceitos mais importantes da análise. Cita Cauchy como aquele que deu uma conceituação dinâmica de limite.

Bezerra é um formalista. Em nenhuma definição há qualquer referência à intuição; ele está no mundo formalizado. Entre as categorias por nós definidas, se enquadraria na abordagem formal simbólica.

A carreira profissional de Ary Quintella (1906-1968) lhe permitiu fazer parte do quadro de membros da Companhia Editora Nacional e os livros didáticos de matemática de sua autoria foram transformados em best-sellers educacionais (DELLABETTA, RIBEIRO, TOILLIER, 2017, p. 3). No livro do terceiro ano colegial, ele apresenta o conceito de limite de função seguindo a ordenação a seguir:

Intervalo, variável, função, representação gráfica de uma função, limite de uma variável, infinitésimos, limite de uma função.

A função é uma correspondência entre dois conjuntos C e C', a qual ele exemplifica com y=2x, e define essa correspondência que associa a cada valor de x de C, um único valor y de C', definido pela equação y=2x que dá o conceito de função. Introduz os conceitos de domínio e contradomínio. Para indicar que o limite da variável x é a constante **a**, podemos escrever lim x = a, x→ a, $|x - a| < \epsilon$ ou - ε<x - a< ε. Após a definição simbólica, ele dá o exemplo da dízima periódica 2,99999... cujo limite é 3. O limite de uma função é apresentado com o exemplo da função y= 1+x , se a variável x forem atribuídos valores 2,9; 2,99; 2,999... cujo limite é 3, os correspondentes de y serão 3,9; 3,99; 3,999 ... cujo limite é 4. Assim $y \ = 4$ segue a definição formal. Não há nenhum gráfico para mostrar essa proximidade.

Uma função y= f(x) tem um limite **b** quando a variável x tende para **a** se, a um positivo δ, arbitrariamente pequeno, corresponde um positivo ε tal que, para $|x - a| < \varepsilon$ e x≠a, se tenha $|y - b| < \delta$.

Quintella mescla as abordagens: nem todas as definições são apresentadas formalmente; às vezes ele apela para a intuição. Em nossa opinião, ele apresenta uma abordagem formal mesclada com corpóreo simbólica, na qual prevalece o formal simbólico.

A coleção de autoria de Euclides Roxo (1890-1950), Haroldo Lisboa da Cunha (1909 - 1991), Roberto Peixoto (sem informações) e Cesar Dacorso Neto (sem informações) foi autorizada pelo Ministério da Educação e, segundo Ribeiro (2006), foi uma obra inovadora que atendeu às duas reformas: de Campos e Capanema. Não concordamos muito com tal avaliação, pelo menos no tópico Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que a obra de Carvalho, que surgiu muito possivelmente no mesmo ano, tem características muito próximas à coleção dos 4 autores. Em nenhuma das pesquisas citadas, foi possível identificar o ano correto da 1ª edição do livro da 3ª série. Segundo Oliveira Filho (2013), a 3ª edição surgiu em 1949.

No livro do terceiro ano colegial, os autores apresentam o conceito de limite seguindo a ordenação a seguir:

Variável, função, representação cartesiana de função, intervalo, limite intuitivo de sucessão, limite de variável, ponto de acumulação, limite de função, limite de sucessão

Esta é a única obra em que os autores começam com uma apresentação histórica de função. A partir de uma tabela que mostra a relação do número de sobreviventes em relação às idades, eles procuram dar a ideia intuitiva de variável e função. Outro exemplo mostra um fenômeno físico representado por uma curva. A terceira possibilidade, uma definição algébrica do tipo S= πr^2 ou y=sen2x. Os conceitos de variável e função são assim definidos:

> Imaginemos duas variáveis x e y, por tal forma conjugadas que, dos valores da primeira, possamos deduzir os valores da segunda. Diz-se, neste caso, que y é função de x, dando-se a esta a denominação de variável independente e àquela, a de variável dependente, ou mais brevemente, função y=f(x) (ROXO Et al, 1955, p.8).

São apresentados os limites de sucessão, limite de variável formalmente:

> Seja C o campo de variabilidade de x, isto é, seja C o conjunto de números que x pode representar. Diz-se que x tende para um número x_0 quando é possível atribuir-lhe valores satisfazendo à condição: $|x - x_0| < \varepsilon$ para todo e qualquer número aritmético ε tão pequeno quanto quisermos.(ROXO Et al, 1955, p. 30).

Já o limite de uma função é definido formalmente sem qualquer introdução mais intuitiva.

> Dada uma função y= f(x), definida em um intervalo (a, b), dizer que: $y = y_0$ equivale a afirmar ser possível a condição $|y - y_0| < \delta$ para qualquer número aritmético, tão pequeno quanto desejarmos, desde que tomemos x suficientemente próximo de x_0 (ROXO Et al, 1955, p. 30).

Os quatro autores tentaram seguir as ideias de Felix Klein, abordando a historicidade dos conceitos e os exemplos antes das definições; entretanto só as realizaram parcialmente. Para alguns conceitos, exploraram a historicidade - como foi o caso do conceito de função - para os demais não. Os exemplos aparecem raramente quando se trata de limites, apenas para o limite intuitivo de função, começam com a dízima 0,99... e mostram que o lim (1- a_n)= 0 e lim a_n =1, onde a_1= 0,9, a_2= 0,99 ... a_n = 0,99...9... As demais definições são formais. Os autores mesclam os três mundos de Tall, como Carvalho e Maeder. Segundo as categorias por nós propostas, eles trazem uma abordagem formal mesclada com corpóreo simbólica.

Constatamos que as obras analisadas não são "cópias" uma das outras: cada uma delas apresenta uma proposta própria, tanto na sequência de conceitos, quanto nos exemplos, abordagem do conceito de limite, conceitos correlatos, ilustrações e autores citados. O quadro 3 indica os autores que foram consultados pelos autores das coleções.

Quadro 3: Referências

Thales de Faria Mello Carvalho	Francesco Severi; Manoel Amoroso Costa; Lélio Gama[6]
Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto	Descartes; Newton, Carnot (apenas para derivadas)
Algacyr Munhoz Maeder	Angelo Tonolo; Granville (apenas para derivadas)
Manoel Jairo Bezerra	Não cita[7]
Ary Quintella	Lucien Godeaux (apenas para derivadas)

Fonte: Dados trabalhados pela autora

As várias edições dos livros são indicadoras que foram muito usados nessas décadas. O livro de Bezerra teve edição em 1976 (BERNARDINO, 2016); Maeder, em 1962 (LONGEN, 2007); Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto, em 1961

[6] Exceto Severi, os dois outros autores são brasileiros.

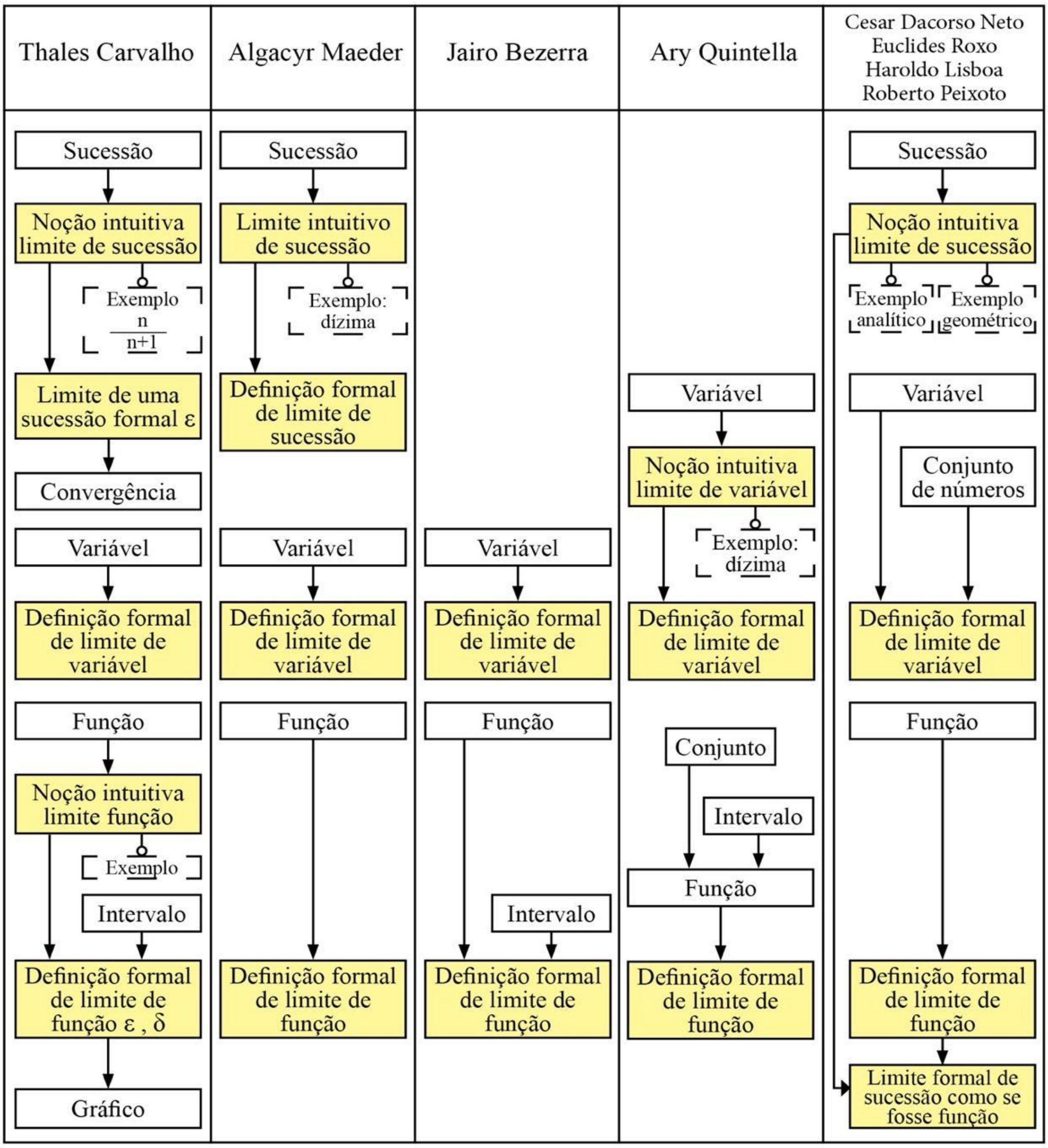
[7] Na edição que analisamos não há referências de autores, entretanto, Ribeiro (2011, p. 200) encontrou numa edição de Bezerra, várias referências: Thales Carvalho; Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto; Sinésio de Faria; Ary Quintella; Bourdon, Francesco Severi, entre outros.

(RIBEIRO, 2011); Ary Quintella, em 1970 (CORREIA; SANTOS, 2021); Thales Carvalho, em 1969.

No Quadro 4 podemos comparar os principais conceitos apresentados, no que se refere ao limite, por todos autores das cinco coleções.

Pelo quadro 4, os autores revelam que uma abordagem apenas corpórea, informal do conceito de limite não bastava para revelar o verdadeiro comportamento do limite, pois a evidência numérica poderia levar a conclusões erradas (ANTON, 2014); assim, era preciso apresentar uma definição formalizada; trata-se, sem dúvida, de um entendimento correto, entretanto, parece não terem considerado que se tratava de um tema do ensino secundário, para iniciantes. Todos eles usaram a definição formalizada de limite.

Quadro 4: Síntese da abordagem do conceito de limite



Fonte: Elaborado pela autora[8]

A GUISA DE CONCLUSÃO

As abordagens dos autores dos livros didáticos a respeito do conceito de função são distintas. Em comum, estão as definições dos conceitos de função, variável, limite de variável e limite de função. Entretanto, nem todos trazem a definição de limite de sucessão. As abordagens do conceito de limite de variável e de limite de função são distintas: Carvalho apresenta intuitivamente os conceitos de sucessão, limite de sucessão e limite de função. No

[8] Com desenho de Johny Dirlei da Silva Acosta

entanto, após essa abordagem corpórea, ele usa o simbolismo e formaliza cada definição. Podemos dizer que sua abordagem é formal mesclada com corpóreo simbólica. Maeder também traz uma abordagem formal mesclada com corpóreo simbólica, entretanto, ele tende mais ao formalismo. Bezerra apresenta uma abordagem totalmente formalista. Enquanto Ary Quintella traz o conceito de limite de variável de maneira corpórea, os demais conceitos são formalistas. Euclides Roxo, Haroldo Cunha, Roberto Peixoto e Cesar Dacorso Neto apresentam uma abordagem simbólico formal. Nenhum dos autores abordou o corpóreo de forma pura; todos eles utilizaram também uma abordagem formalista. Concluímos que somente Bezerra escolheu usar apenas a abordagem formalista; os demais autores cujas obras foram analisadas usaram uma mescla dos 3 mundos (conforme figura 2), para tratarem dos conceitos de limite de sucessão, limite de variável e limite de função.

Os exemplos que os autores utilizaram para dar uma noção corpórea do conceito de limite - como dízimas periódicas, cálculo de perímetro de circunferência, área do círculo, função trigonométrica- aproximam os conceitos destinados ao ensino fundamental e médio àquele de limite. Eles ainda não perderam sua atualidade. Uma abordagem que poderia ser empregada nos cursos de formação de professores de matemática, na disciplina de CDI, para mostrar ao futuro professor a relação entre os conceitos a serem trabalhados no ensino médio e a serem estudados no ensino superior. Parafraseando o matemático Severi (apud CARVALHO, 1955, p.7), quando diz que "Ao professor compete fazer do livro um organismo plástico e vivo [...]", em minha avaliação, o professor de matemática em sala de aula deve tornar seu ensino um organismo maleável, dinâmico e vivo e não uma sucessão morta de definições e regras de como calcular. O CDI, criado por Newton e Leibniz, possuía em suas raízes problemas reais que os motivaram, e os seus seguidores procuraram aperfeiçoá-los e transformaram o CDI num dos mais potentes instrumentos para resolver os fenômenos do mundo real.

Agradecimentos especiais aos colegas Tercio Kill, Janice Lando e Luana Kurz por seus comentários e sugestões preliminares ao texto.

Referências

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo** [recurso eletrônico]. 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

ARAUJO, Everton Alves. **Proposta de ensino do cálculo diferencial e integral no ensino médio via Geogebra**. Diss. Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal do vale do São Francisco. Juazeiro, 2015.

ÁVILA, G. O ensino de Cálculo no 2º Grau. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.18, p.1-9, 1991.

ÁVILA, G. Limites e derivadas no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, 60, p. 30-32, 2006.

BERNARDINO, Camila Libaroni. **Números complexos: um estudo histórico sobre sua abordagem na coleção matemática 2º ciclo**. Diss. Mestrado em Educação Matemática. UNESP/Rio Claro, 2016.

BEZERRA, Jairo. **Curso de Matemática**. 10ª ed. São Paulo: Editora Nacional, 196?

BOREL, Émile. L'Adaptation de L'enseignement secondaire aux progrés de la Science. **L'enseignement mathématique**. 16, 1914, p. 198-210.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: mar. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação e Saúde Pública. Diário Oficial, 31 jul. 1931, p. 12.405-12.427.

BRASIL. Ministério da Educação e Saúde. Portaria n. 177, 16 mar.1943.

CAPANEMA, Gustavo. Gabinete do Ministro, 1942. Disponível em https://docvirt.com/docreader.net/DocReader.aspx?bib=ARQ_GC_F&hf=www.fgv.br&pagfis=13932, acesso em 15 mar. 2022.

CARVALHO, Thales de Faria Mello. **Matemática para o terceiro ano colegial**. 5 ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1955.

CARVALHO, Carlos Augusto Santos. **Aspectos relevantes para uma história da evolução do currículo de Matemática na segunda metade do século XX- o caso do Colégio de Aplicação da UFRJ.** Diss. Mestrado em Ensino da Matemática, UFRJ, 2012.

CORREIA, Nickson; SANTOS, Viviane. Álgebra e Aritmética em livros didáticos do curso colegial publicados durante a portaria ministerial no 1045 de 1951. **HISTEMAT**, v. 7, 2021, p. 1-27.

COUTO, Mia. **A confissão da Leoa**. São Paulo: Companhia das Letras, 2016.

DALLABRIDA, Norberto. A reforma Francisco Campos e a modernização nacionalizada do ensino secundário. **Educação**, *[S. l.]*, v. 32, n. 2, 2009. Disponível em: https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/view/5520. Acesso em: 22 jan. 2023.

DELLABETTA, Ana Cristina; RIBEIRO, Dulcyiene; TOILLIER, Jean Sebastian. A obra de Ary Quintella e as ideias de volume. Encontro Paranaense de Educação Matemática, **Anais**...Cascável, 2017, p. 1-12.

DOMINGOS, António Manuel Dias. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior.** Tese. Doutorado em Ciência da Educação. Universidade Nova de Lisboa, 2003.

DUARTE, Aparecida Rodrigues Silva. Euclides Roxo. Dicionário de Experts. Disponível em https://www.ghemat.com.br/itens/euclides-roxo, acesso em 15 jan. 2022.

FALLAS, Luis Fabian Gutiérrez. **A compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função: um estudo com alunos do 12º ano**. Diss. Mestrado em Educação. Universidade de Lisboa, 2016.

KLEIN, Félix. **Matemática Elementar de um ponto de vista superior**. v. 1, Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

KLEIN, Félix. **Elementary Mathematics from an advanced standpoint**. New York: Dover, 1945.

LISPECTOR, Clarice. **A descoberta do mundo**. São Paulo: Rocco, 1967.

LONGEN, Adilson – **Livros didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da educação matemática**. Tese. Doutorado em Educação. Universidade Federal do Paraná, 2007.

MACHADO, Nílson José. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica**: possível e necessário. São Paulo: USP, 2008.

MAEDER, Algacyr Munhoz. **Curso de Matemática** – 3º livro – ciclo colegial. 5ª ed. São Paulo:Edições Melhoramentos, 1955.

MOLON, Jaqueline; FIGUEIREDO, Edson. Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software Geogebra. **Ciência e Natura**, v. 37, p. 156-178, 2015.

OLIVEIRA FILHO, Francisco. **A Matemática do Colégio: livros didáticos e história de uma disciplina escolar.** Tese. Doutorado em Educação Matemática. Universidade Anhanguera, 2013.

ORFÃO, Ronaldo Barros; COSTA, Nielse Meneguelo Lobo; FRANT, Janete Bolite. Ensino do Cálculo Infinitesimal na Educação Básica: reflexões com base prática. **Anais**... XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, 2011.

OTONE, Maryneusa Cordeiro – **História da constituição da matemática do colégio no cotidiano escolar.** Tese. Doutorado em Educação Matemática. PUC-SP, 2011.

POINCARÉ, Henri. **A ciência e a hipótese**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1986.

POINCARÉ, Henri. **Science et Méthode**. Paris: Flamarion, 1908.

QUINTELLA, Ary. **Matemática** para o terceiro ano colegial. 12ª ed. São Editora Nacional, 1965.

RIBEIRO, Denise Franco Capello – **Um estudo da contribuição de livros didáticos de Matemática no processo de disciplinarização da matemática escolar do colégio -1943 a 1961**. Tese. Doutorado em Educação Matemática. PUC-SP, 20

ROXO, Euclides; CUNHA, Haroldo Lisboa; PEIXOTO, Roberto; DACORSO NETO, César. **Matemática** 2º Ciclo – 3ª série. 4ª ed. Rio de janeiro: Francisco Alves, 1955.

SILVA, Eliseu do Nascimento. **Uma introdução ao estudo das derivadas no ensino médio**. Diss. Mestrado Profissional em Matemática, Mossoró, 2016.

SILVA, Carlos Rodrigues; SOUZA, Kelia Rodrigues de Queiroz. Cálculo: uma proposta possível para o ensino médio. **Revista Panorâmica On-Line**, v. 17, p. 81-89, ago.-dez. 2014.

SILVA, Everaldo Paulo; SCHUBRING, Gert. Cálculo em matemática: um assunto para o ensino em geral ou específico para o ensino técnico. **Hist. Educ**. v. 20, n. 49, p. 65-80, maio/ago. 2006.

SOUZA, Jonas Ferreira. **Cálculo diferencial: uma proposta de abordagem no ensino médio**. Diss. Mestrado profissional em Matemática. Universidade Federal de Sergipe, 2019.

TALL, David. To transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proff. in Grouws D.A. (ed.) Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning, Macmillan, New York, 495–511, 1992. Disponível em https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-to-amt.pdf

TALL, David. Using technology to support an embodied approach to learning concepts in Mathematics. In: História e Tecnologia no Ensino de Matemática. Luiz M. Carvalho e Luiz C. Guimaraes (Org.). Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2002, p. 1-28.

TALL, D. O. **How Humans Learn to Think Mathematically**: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press, 2013

TOLSTÓI, LIEV. **Guerra e Paz**. São Paulo: Principis, 2020.

VERISSIMO, Érico. O tempo e o vento. v. 2. Porto Alegre: Globo, 1967.