

EXERCÍCIOS NO LIVRO E NO CADERNO: A COMPLEMENTARIEDADE NECESSÁRIA À TEORIA

EXERCISES IN THE TEXTBOOK AND IN THE SCHOOL NOTEBOOK: THE THEORY'S NECESSARY COMPLEMENTARITY

Circe Mary Silva da Silva¹

 ORCID iD: <http://orcid.org/0000-0002-4828-8029>

Mária Cristina Almeida²

 ORCID iD: <http://orcid.org/0000-0002-1532-832X>

Submetido: 03 de setembro de 2023

Aprovado: 12 de março de 2024

RESUMO

O presente texto tem como objetivo identificar e analisar, no livro *Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética* para o 6º ano dos liceus de Palma Fernandes – livro este destinado ao ensino secundário³ de matemática em Portugal – as tarefas resolvidas e propostas sobre o conceito de derivada comparando-as com as tarefas que constam no caderno de um aluno da década de 1950. Para tal, procedemos à identificação de quais tipos de tarefas sobre funções derivadas no ensino da matemática eram usualmente prescritas aos alunos dos cursos secundários em Portugal no período de 1944 a 1970. A cultura escolar, objetivada nos registros dos livros e cadernos escolares, resulta das práticas escolares e ganha visibilidade por meio desses registros. O *corpus* documental da pesquisa é integrado por Livros de Exercícios da autoria de José Palma Fernandes e um caderno escolar. A análise evidenciou que: os exercícios do livro e do caderno eram predominantes e estavam de acordo com o programa vigente à época. Os registros das atividades práticas – exercícios – no caderno, eram idênticos aos mesmos propostos no livro de Palma Fernandes de 1955, o que comprova o uso efetivo daquele livro.

Palavras-chave: Livros de exercícios; Cadernos escolares; Derivadas; Ensino Secundário; Cultura escolar.

ABSTRACT/ RESUMEN/ RÉSUMÉ

This text aims to identify and analyze, in the book *Exercises in Algebra, Trigonometry and Arithmetic* for the 6th year of liceus by Palma Fernandes – a book intended for secondary mathematics education in Portugal – the solved tasks and proposals on the concept of derivative and comparing them with the tasks contained in a student's notebook from the 1950s. For that we proceeded to identify which types of tasks on function derivatives in mathematics teaching were usually prescribed to secondary school students in Portugal, from 1944 to 1970. School culture is represented in students' notations in their textbooks and school notebooks' written/schematic/pictorial accounts, resulting from school practices and which gains visibility through these records. The documentary *corpus* of the research includes Exercise Books by Palma Fernandes and a school notebook. The analysis showed that: the exercises in the book and notebook were predominant and were in accordance with the program in force at the time. Records of practical activities – exercises – in the notebook were identical to those proposed in the 1955 book by Palma Fernandes, which reveals the effective use of that book.

Keywords: Exercise books; School notebooks; Derivatives; Secondary education; School culture.

¹ Doutorado em Pedagogia pela Faculdade de Matemática da Universität Bielefeld (UB, Alemanha). Professora colaboradora no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), Brasil. Rua Gomes carneiro, 01, Pelotas (RS), Brasil, 96010-610. E-mail: cmdynnikov@gmail.com.

² Doutoramento em Ciências da Educação pela Universidade Nova de Lisboa (UNL). Investigadora integrada do Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Portugal. Rua Duarte Pacheco Pereira, 27B, 2830 – 192 Barreiro, Portugal. E-mail: malmeyda@fcs.unl.pt

³ Ensino secundário, à época, correspondia ao ensino entre primário e superior.

INTRODUÇÃO

Teoria e prática andam de mãos enlaçadas. Pode-se dizer que, em relação à aprendizagem, a teoria e a prática são conceitos complementares (Otte; Barros, 2017). Exercitar-se por meio de atividades não é sinônimo de mecanização na resolução de tarefas, mas um recurso para assimilar a teoria. Conforme dizia o matemático e educador José Sebastião e Silva (1914-1972): “Na aprendizagem da matemática não basta ter intuição, compreender, definir e raciocinar. É também indispensável adquirir certos automatismos psicológicos. [...] O professor deve insistir para que os alunos se treinem bastante em exercícios equilibrados, que requeiram a aplicação das referidas técnicas” (SILVA, 1975, p. 12-13).

Os exercícios fazem parte da rotina de sala de aula desde tempos remotos. A imagem representada nos azulejos das paredes da sala de aula de geometria e astronomia (figura 1), dos anos de 1700, mostra os anjos a se exercitarem na geometria. O revestimento das paredes com azulejos foi concluído em 1749 no Colégio Espírito Santo, em Évora (VAZ, 2020, p. 3), atualmente Universidade de Évora. Segundo Vaz, as imagens nas paredes das salas de aula foram uma inovação – usar as imagens para ensinar. Os anjos estão representados de forma idealística, como a realizar atividades que requerem os usos de instrumentos de desenho: régua, compassos e instrumentos de medida, como quadrante móvel e luneta. Os desenhos de triângulos inscritos em circunferências podem indicar exercícios dos *Elementos* de Euclides. Segundo os pesquisadores Matos e Rodrigues (2020), os azulejos foram inspirados no livro didático de André Tacquet (1612-1660), que era adotado para o ensino da matemática à época.

Figura 1: Anjos nas paredes da aula de Geometria e Astronomia.



Fonte: Fotografia de um mosaico da Sala de Aula da Universidade de Évora (foto de uma das autoras, 2023)

A arte e a geometria se misturam, a liberdade do artista permite que ele imagine situações distantes da realidade. Para a decoração das paredes da sala, revestidas com azulejos azuis, o artista criou um mundo fantástico de anjos uns, com asas a voar: outros, na terra, simulando crianças aprendendo por meio de atividades, representações estas que mostram como ele interpretava o fazer matemática. Huizinga, citado por Burke, declarava “[...] o que o estudo da história e da criação artística têm em comum é um modo de formar imagens” (HUIZINGA, *apud* BURKE, 2004, p. 14). As imagens refletem não apenas a visão de mundo do artista, mas também a cultura em que ele vivia. Os azulejos com os anjos decoraram as paredes de uma escola jesuítica; portanto, à época, nada poderia agradar mais aos dirigentes da instituição, do que motivos relacionados à religião católica.

O caderno tem sido sempre um acompanhante do aluno. A pintura de Bogdanov-Belsky de 1903, intitulada - O Ensaio - mostra um aluno, em sala de aula, com seu caderno numa atitude que parece revelar reflexão (Figura 2).

Figura 2: Menino com caderno.



Fonte: Museu Estatal de São Petersburgo

Retornando a um passado menos remoto do ensino da matemática e olhando os livros didáticos como testemunhas materiais que passaram pelas mãos de tantos estudantes e professores, chegamos ao século XX e aos livros de exercícios. Estes livros tinham como público-alvo principalmente os alunos e serviam como suporte para a prática, uma vez que os livros didáticos aprovados privilegiavam mais a teoria e apresentavam poucos exercícios.

Os exercícios aparecem nos livros e nos cadernos de matemática dos alunos, fazendo parte do dia a dia da cultura escolar (BENITO, 2016): têm a função específica de possibilitar a prática das questões teóricas, de fixar os conhecimentos. Os exercícios⁴ estão presentes em livros específicos e também nos cadernos de matemática dos alunos. Em Portugal, até a primeira metade do século XX, os livros escolares apresentavam a teoria seguida por exercícios de aplicação. No entanto, estes eram em número insuficiente para praticar a teoria. Encontramos um autor, que se dedicou a escrita de livros específicos de exercícios - António do Nascimento Palma Fernandes (1907-1968) – que teve suas obras editadas por cerca de trinta anos.

O objetivo da presente pesquisa é identificar, no livro *Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética* para o 6º ano dos liceus de Palma Fernandes – livro este destinado ao ensino secundário de matemática em Portugal – as tarefas resolvidas e propostas sobre o conceito de derivada comparando-as com as tarefas que constam no caderno de um aluno da década de 1950.

CAMINHOS DA PESQUISA

Livro didático é um elemento estruturante da cultura escolar, está presente como as cadeiras enfileiradas na sala de aula, o quadro negro, verde ou branco, entre outros (VIDAL, 2009). Conforme Benito (2017, p. 119), cultura escolar é compreendida como um conjunto “[...] de práticas e discursos que regularam ou regulam a vida das instituições de educação formal e a profissão docente”.

Um olhar aprofundado a esses elementos pode iluminar o conhecimento do passado e trazer algumas evidências dos saberes ensinados na sala de aula. No intuito de interpretar e historicizar práticas culturais, no universo escolar, o livro didático e o caderno, elementos estruturantes, que integram o ensino e aprendizagem em sala de aula, foram analisados. Benito (2010) reflete sobre a cultura material, na qual inclui os cadernos escolares, dizendo que se pode aprender a partir deles acerca de coisas que se produzem na escola. Nos acervos públicos

⁴ Empregamos o termo “exercícios” como sinônimo de tarefa, atividade, questão proposta nos livros e resolvida nos cadernos.

e particulares encontram-se cadernos, que são registros pessoais de alunos que deixaram para a posteridade os seus testemunhos escritos. Os cadernos trazem informações que os livros não conseguem dar por terem sido produzidos no exterior da sala de aula e não em seu interior, como os cadernos.

Integram o *corpus* documental da pesquisa livros de Palma Fernandes e um caderno do aluno António José Baptista de Almeida. Todos eles pertencem ao acervo particular de uma das pesquisadoras deste trabalho. O período escolhido 1944 -1970 corresponde a primeira edição e última do livro Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional para o 6º ano dos liceus de Palma Fernandes.

Do acervo particular de Mária Cristina Almeida, foram analisados os exemplares de seis edições do livro de exercícios (Quadro 1).

Quadro 1: Edições analisadas do livro Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional para o 6º ano dos liceus.

Ano	Edição
1955	8ª
1957	9ª
1960	11ª
1961	12ª
1965	14ª
1968	15ª

Fonte: Dados trabalhados pelas autoras

No catálogo da Biblioteca Nacional de Portugal, encontramos exemplares anteriores e posteriores a esses que integram o quadro 1, o que nos permitiu conhecer o ano da primeira edição da obra – 1944 – bem como o da última – 1970.

Nas várias edições, o livro está estruturado em três partes, que correspondem aos temas *Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional*, cada parte está dividida em capítulos e termina com um tópico designado ‘Pontos de revisão’. A *Álgebra* compreende oito capítulos: Capítulo I - Números reais e complexos, Capítulo II - Funções; sua classificação - Representação geométrica de equações, Capítulo III - Infinitamente grandes e infinitésimos, Capítulo IV - Limites, Continuidade, Capítulo V - Derivadas, Capítulo VI - Polinómios inteiros - Método dos coeficientes indeterminados - Regra de Ruffini, Capítulo VII - Fracções algébricas; operações

- Símbolos de impossibilidade e de indeterminação. Os capítulos da *Trigonometria* são: Capítulo I - Generalização da noção de ângulo e de arco, Capítulo II - Funções trigonométricas; sua variação, Capítulo III - Relações entre as funções trigonométricas de ângulos cuja soma ou diferença é um múltiplo de 180° ou de 90° - Redução ao 1.º quadrante, Capítulo IV - Relações entre as funções trigonométricas do mesmo ângulo, Capítulo V - Valores das funções trigonométricas dos ângulos de 30° , 45° e 60° - Expressões gerais. Funções inversas. Na *Aritmética Racional* os capítulos são: Capítulo I - Operações aritméticas, Capítulo II - Sistemas de numeração, Capítulo III - Divisibilidade, Capítulo IV - Números primos, Capítulo V - Máximo divisor comum e menor múltiplo comum.

A estrutura dos capítulos é semelhante, começando com exemplos resolvidos, onde o autor refere, por vezes, as principais regras, propriedades, teoremas etc. que a sua resolução envolve. Em seguida, aparecem os enunciados de variados exercícios. Finalizando com as respostas aos exercícios propostos.

A razão da escolha do livro de exercícios de Palma Fernandes reside na ampla divulgação que esta obra teve por quase trinta anos. Mesmo não sendo o livro recomendado para uso em sala de aula, os estudantes o adquiriam para realizarem exercícios de fixação, de assimilação dos conteúdos trabalhados, uma vez que os livros didáticos adotados não apresentavam muitas tarefas.

Uma análise preliminar permitiu constatar a existência de dois tipos de atividades: os exercícios resolvidos e os exercícios propostos com respostas. Os exercícios, por sua vez, foram classificados *a posteriori* em 3 categorias.

- 1) Teóricos – usar a definição para resolver um exercício. Por exemplo, determinar a derivada num ponto a partir da definição.
- 2) Com cálculo direto – encontrar a solução a partir de regras dadas. Por exemplo: encontrar a derivada de uma função.
- 3) De aplicações tarefas envolvendo aplicações do conceito de derivada. Por exemplo: encontrar máximos e mínimos de funções.

Além destes, no final de cada capítulo do livro, havia exercícios de revisão, entre os quais estavam alguns exercícios já aplicados em exames anteriores (Figura 3).

Figura 3: Fragmento do livro de Palma Fernandes, p. 99

b) Calcule a derivada da função $y = (3x^2 + 5)^4$.

(Saído no exame do Liceu em 1951)

Fonte: Acervo particular de Mária Almeida

ANÁLISE DOS DADOS

Elementos estruturantes da cultura escolar, por muitos anos, livro e caderno serviram de apoio para o aluno aprender matemática. O livro e o caderno são fontes de conhecimentos e, além disso, o caderno serve como registro das aulas e de anotações sobre as tarefas realizadas.

Palma Fernandes começou a publicar ainda na década de 1930, escrevendo, inicialmente, sobre a geometria escolar. Em 1939, no catálogo da BNP, encontra-se um primeiro livro de exercícios de geometria para o 6º ano dos liceus. Entretanto, sobre a temática álgebra, a primeira edição (1944) e a última edição (1970) revelam que, por quase trinta anos, os livros de exercícios de álgebra de Palma Fernandes circularam no mercado editorial. Nesses exemplares consultados na pesquisa, praticamente não são encontrados prefácios, todavia, em 1944, a publicação dos *Elementos de Geometria* traz uma curta nota do autor. Nela, ele transcreveu uma memória descritiva em que aborda os exercícios. “Cada assunto tratado vai acompanhado de grande número de exercícios mais ou menos graduados por ordem de dificuldade crescente. A resolução destes exercícios permite ao estudante uma melhor assimilação dos assuntos estudados” (FERNANDES, 1944, p. viii). Esse princípio enunciado pode ter sido adotado nos demais livros de exercícios, qual seja, propor os exercícios por ordem crescente de dificuldade. Na 5ª edição dos *Elementos de Geometria* de 1949, o autor aconselha os alunos sobre como devem estudar matemática. Entre os onze conselhos, destacamos os seguintes: “ler a lição toda, sem preocupações de compreender as palavras ou frases que julgue difíceis; parar frequentemente para reler, relacionar e refletir; prestar cuidadosa atenção às referências e sugestões; num problema ou num teorema, procurar distinguir o que é dado, do que é pedido; ligar certas situações ou problemas com conhecimentos adquiridos através de aplicações anteriores” (FERNANDES, 1949, s. p.).

Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional para o 6º ano dos liceus fornecia aos alunos um número significativo de tarefas a respeito dos conteúdos matemáticos programados para o sexto ano. Por isso, começa apresentando o programa referente ao ano anterior. Por exemplo, na edição de 1955, traz o programa de álgebra de 1954. Além do índice, têm 256 páginas (FERNANDES, 1955). O capítulo V é dedicado às derivadas.

Cotejando o conteúdo dos exemplares que integram o Quadro 1, a constatação foi que os exercícios propostos são rigorosamente os mesmos em todos eles, seja nos exercícios

resolvidos, seja nos exercícios propostos. A única alteração identificada foi a inclusão de oito problemas de máximos e mínimos, que estão presentes a partir da edição de 1960⁵.

O AUTOR DO LIVRO E O AUTOR DO CADERNO

António do Nascimento Palma Fernandes foi assistente na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e, posteriormente, professor efetivo do Liceu de Sá de Miranda, em Braga, e do Liceu Pedro Nunes, onde se encontrava no ano letivo 1950/51. Foi autor de vários livros de texto e livros de exercícios. Encontramos 235 registos em seu nome no catálogo geral da Biblioteca Nacional de Portugal.

Entre os livros didáticos do autor encontram-se: Exercícios de Geometria e Aritmética para o 1º ano dos liceus, para o 2º, 3º, 4º e 5º ano dos liceus; Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética para o 6º ano dos liceus; Elementos de Geometria para o 2º ciclo dos liceus; Elementos de Trigonometria para o 3º ciclo dos liceus; Elementos de Geometria Analítica para o 7º ano dos liceus; Tabuas de Logaritmos, e em parceria com Francisco Gonçalves, o livro Elementos de Álgebra para o 6º e 7º anos dos liceus. Estima-se que em todos os livros haja 10.000 exercícios (CANAVARRO, 2018).

Na atualidade, Palma Fernandes continua a ser lembrado. Ao referir-se ao autor, Ponte (2003) o intitula “[...] o tristemente célebre Palma Fernandes” (PONTE, 2003, p. 22), uma vez que considerava a proposta de seus livros, das décadas de 1940 e 1950, de resolver listas infundáveis de exercícios como um paradigma de memorização e mecanização, que nem sempre alcançava bons resultados. Essa opinião não era compartilhada com autores de livros didáticos como José da Silva Paulo⁶. Em 1944, ele apresentou uma resenha crítica na *Gazeta de Matemática*, na qual mostrou que o autor precisava realizar alguns reparos na parte teórica, mas na parte prática, sua avaliação era positiva:

Apresenta o livro além de exercícios mais ou menos originais do autor, algumas questões saídas em exames de liceus e de aptidão às Universidades. É por isso um bom repositório de exercícios do tipo dos saídos nos exames, como se requer para a preparação dos alunos, e contém bom número deles, para cima de mil (PAULO, 1944, p. 31).

⁵ Eles não faziam parte da edição de 1957, todavia por não termos tido acesso a 10ª edição, não sabemos com certeza, quando foram incluídos pela primeira vez.

⁶ José Duarte da Silva Paulo (1905-1976) foi professor de Matemática, do ensino liceal e foi co-autor de livros didáticos para esta disciplina. Em 1940, colaborou na criação da revista *Gazeta de Matemática*, da qual foi um dos editores e o responsável pela secção ‘Matemáticas Elementares’. Participou ativamente na Reforma da Matemática Moderna, em Portugal, sendo, em 1964, encarregado da regência de turmas de experiência para atualização do ensino da Matemática.

No livro *Fio de memória*, Canavarro (2018) afirma que os livros de Palma Fernandes dirigidos à matemática dos sete anos dos liceus eram muito usados pelos alunos, conta que reteve da entrevista que fez com Fernanda Henriques⁷, “o prazer que ela sentia ao resolver com sucesso as famosas listas de exercícios propostos nos clássicos livros do professor” (CANAVARRO, 2018, p. 59).

O presente estudo leva em conta o caderno do sexto ano escolar de António José Baptista Almeida (1937-2001), que frequentou o ensino primário na antiga Escola Conde de Ferreira⁸, no Barreiro. No ensino secundário⁹, concluiu o Curso Geral de Comércio, numa escola técnica, e o 3º ciclo num liceu, em Lisboa. No ensino superior, cursou Ciências Económicas e Financeiras, em Lisboa. Trabalhou na Companhia Nacional de Navegação, onde foi Diretor na área de pessoal.

O caderno possui setenta e cinco páginas, tendo vinte e seis páginas ocupadas com o tema derivadas, e foi escrito a tinta e a lápis preto: o lápis vermelho foi utilizado na grafia dos títulos e para assinalar aquilo que o aluno considerou importante. O caderno inicia com uma muito breve revisão sobre correspondências, frações e conjuntos numéricos, que é o primeiro tópico do programa de 1954. Os títulos incluídos no caderno de que observamos segue o programa sequencialmente (Quadro 2). Aparecem no caderno também indicações de trabalhos de casa, referindo páginas e exercícios. Quase todos os exercícios propostos para casa estão resolvidos no caderno, mas não há elementos que permitam inferir se a resolução destes acontecia somente em casa ou também em aula.

Quadro 2: Programa oficial no livro e conteúdos no caderno.

ÁLGEBRA PROGRAMA (1954)	CADERNO
Breves noções sobre as sucessivas generalizações do conceito de número; representação geométrica do sistema dos números reais. Números complexos de duas unidades; forma	Números complexos

⁷ Fernanda Henriques (1946-) nasceu em Torres Vedras. É professora na Universidade de Évora, desde 1995, onde criou o Mestrado em Questões de Género e Educação para a Cidadania, do qual foi diretora.

⁸ De origem modesta, Joaquim Ferreira dos Santos (1782-1866), conhecido como Conde de Ferreira, nasceu no Porto e emigrou para o Brasil em 1800. Tendo feito enorme fortuna, além de muitos donativos oferecidos a diversas instituições no Brasil, ofereceu ao Estado Português donativo para construir 120 Escolas de Instrução Primária, para ambos os sexos. Foi o grande mecenas da instrução primária em Portugal.

⁹ Entre 1948 e 1968, o sistema escolar português compreendia quatro anos de ensino primário obrigatório (6-9 anos) e o ensino secundário, que se separava em dois ramos: o ensino liceal e o ensino técnico. O ensino liceal dividia-se em três ciclos: 1º ciclo (10-11 anos), 2º ciclo (12-14 anos), 3º ciclo (15-16 anos). No 3º ciclo liceal, os alunos preparavam-se para estudos universitários, visando às profissões liberais e quadros técnicos superiores. As escolas técnicas eram destinadas à formação profissional, não se preocupando com a preparação para as universidades.

<p>algébrica; igualdade, desigualdade e operações. Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções.</p> <p>Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.</p> <p>Noção elementar de continuidade de uma função.</p> <p>Derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas. Aplicação ao estudo da variação das funções nos casos mais simples.</p> <p>Propriedades dos polinómios inteiros. Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios,</p> <p>Divisão por $(x - a)$; polinómio identicamente nulo; polinómios idênticos; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini.</p> <p>Fracções algébricas. Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma</p> $\frac{0}{0}, \frac{0}{\infty}, 0 \times \infty ;$ <p>verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.</p>	<p>Funções, Variáveis, Domínio, Zeros, Classificação de funções, Funções inversas, Contradomínio</p> <p>Infinitamente grandes e infinitésimos, Vizinhanças, Limites, Limites laterais, Operações sobre Limites</p> <p>Continuidade</p> <p>Derivadas, Derivada de uma função num ponto, Regras de derivação</p> <p>Polinómios inteiros, Propriedades, Decompor um polinómio em factores, Raízes ou zeros, Princípio das Identidades, Condição de Identidade, Método dos coeficientes indeterminados, Regra de Ruffini</p> <p>Fracções Algébricas, Símbolos de impossibilidade, Símbolos de indeterminação</p> <p>Estudo da variação das funções (derivada), Determinar máximos e mínimos</p> <p>Assíntotas</p> <p>FIM (Álgebra 6º)</p>
---	---

Fonte: Elaborado pelas autoras a partir de Fernandes, 1955 e do caderno de António Almeida, 6º Ano

Um exemplar do Compêndio de Álgebra de 1955, pertencente a António José Baptista Almeida, traz sua assinatura. Mas, além deste registro, ele fez outras anotações em seu livro. As potencialidades destes pequenos testemunhos permitem uma tipificação e interpretação.

Segundo Martinez-Valcárcel y Alarcón (2016), o material que apresenta esses vestígios indica que o manual escolar foi utilizado por usuários reais, deixando nele seus testemunhos. Materiais como esse fornecem indícios do que foi ministrado em sala de aula, os conteúdos dados e os omitidos, com suas funções e intencionalidades. Podemos chamá-los de para-textos (PASQUALE, 2018). Além de prestarem essas informações, eles trazem pistas da compreensão ou não dos conteúdos pelo usuário.

A figura 3 ilustra a forma como o autor do livro apresentou um exercício resolvido de derivada e também apresenta as anotações ali feitas por António Almeida.

Figura 4: Fragmento do livro de Palma Fernandes e do caderno de António Almeida.

CAPÍTULO V

Derivadas

Estudo da variação das funções

EXEMPLOS

1) Aplicando a definição de derivada numa função num ponto determinar o valor da derivada da função

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

no ponto $x = 2$.

Como $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 1$

e

$$f(2 + \Delta x) = 2 \cdot (2 + \Delta x)^2 - 4(2 + \Delta x) + 1 =$$

$$= 2 \Delta x^2 + 4 \Delta x + 1$$

teremos

$$\frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{2 \Delta x^2 + 4 \Delta x}{\Delta x}$$

donde

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 \Delta x + 4)$$

ou

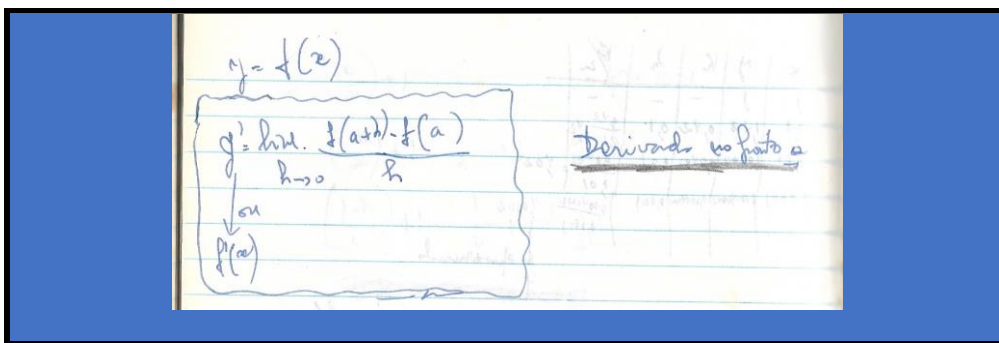
$$f'(2) = 4$$

2) Derivar as funções:

a) $y = 2x^5 - 3x^2 + 4$; b) $y = (2x - 3)^2 \cdot x^2 + x$

a) Teremos

$$y' = (2x^5)' - (3x^2)' + (4)'$$



Fonte: Fernandes, 1955, p. 49; Caderno de António Almeida, 6º Ano, p. 58. Acervo particular de uma das autoras

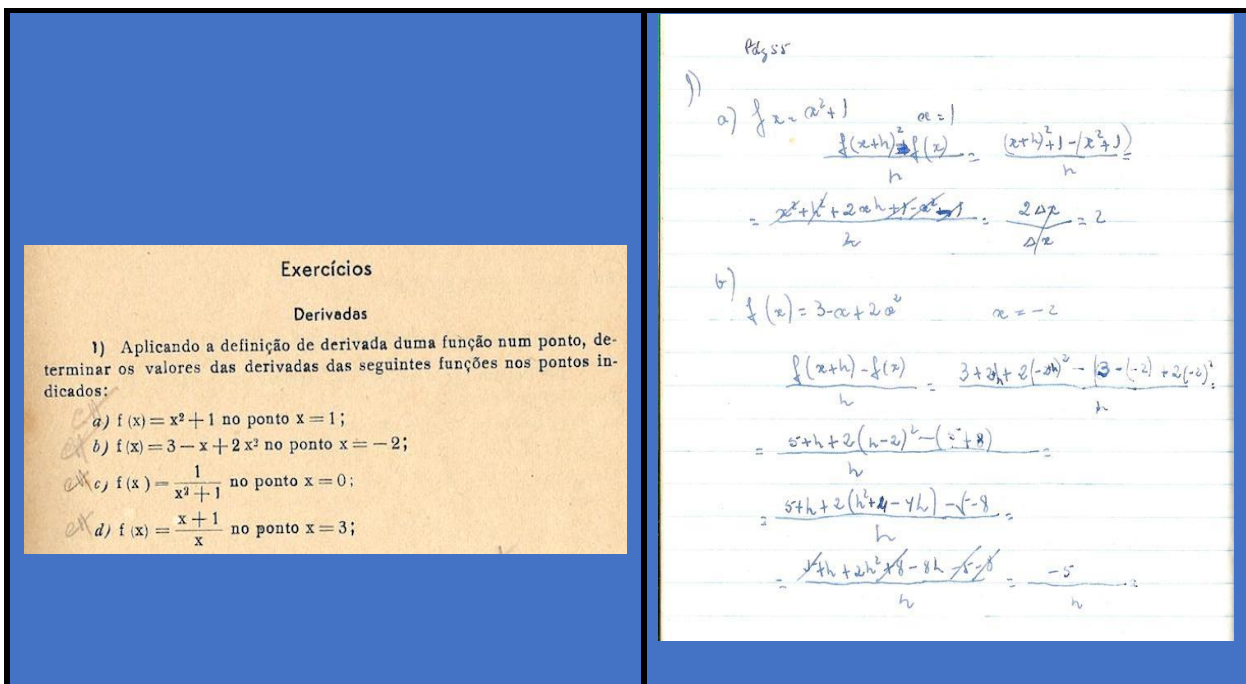
É possível notar, acima na figura 4, as resoluções a lápis, feitas na margem do livro por seu proprietário e, abaixo, a definição de derivada no caderno.

Analisando as anotações inseridas pelo aluno no livro de exercícios percebe-se que ele repete o que já estava feito, apenas substitui o símbolo de acréscimo - Δ - usado no livro, pela letra h . Provavelmente, o professor utilizava, em sala de aula, h e não Δ . Considerando que o livro de exercícios era um suplemento para o trabalho do aluno, o ajustar da simbologia aquela usada pelo professor pode ser explicado no conceito de normas sociomatemáticas. Segundo Domingos (2005, p. 1), “Os significados dos conceitos matemáticos podem assim ser vistos como sendo construídos de um modo interativo, resultando de uma negociação das normas que regem a sala de aula”. Aquele livro, que não era o manual recomendado, utilizava outra simbologia, assim, pode ter ocorrido um conflito para o aluno, que ele o resolveu usando a notação usada em sala de aula.

À esquerda da figura 5, aparece a inserção de símbolos à lápis (com as letras C alongadas) que podem indicar códigos próprios do aluno para avaliar os exercícios que resolveu.

Livro e caderno são objetos de apoio ao aluno. No caso em exame, o aluno registrou inclusive as páginas do livro de onde extraiu os exercícios. Comparando-os, concluímos que ele fez efetivo uso do livro, fazendo, inclusive, alguns dos exercícios propostos.

Figura 5: Fragmento do livro de Palma Fernandes e do caderno de António Almeida



Fonte: Fernandes, 1955, p. 55; Caderno de António Almeida, 6º Ano, p. 64. Acervo particular de uma das autoras

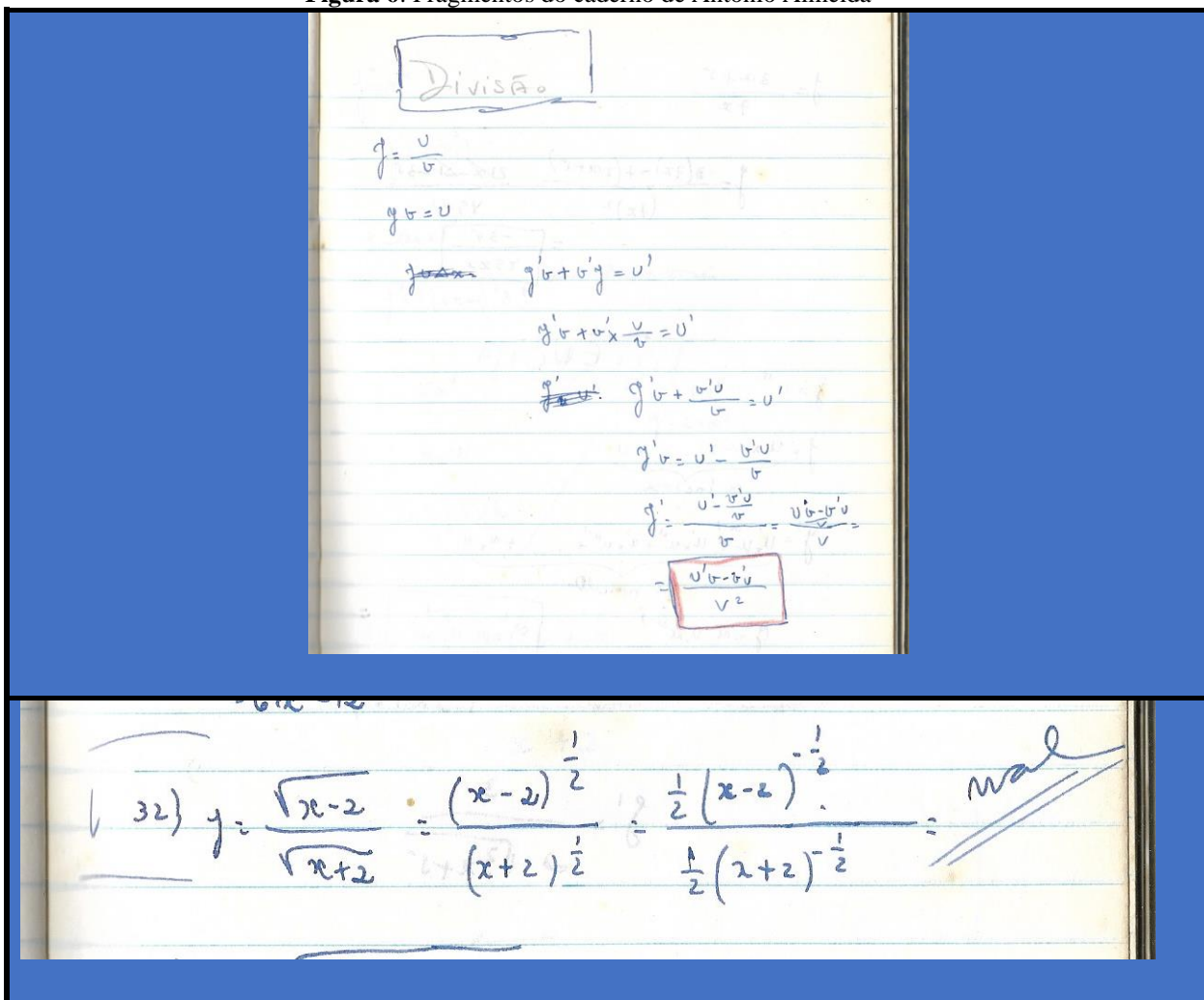
Na figura 5, à esquerda temos os exercícios propostos pelo autor do livro e à direita os exercícios resolvidos no caderno. Na resolução dos exercícios, o aluno usa, simultaneamente, os símbolos Δ e h , para o acréscimo ou incremento à variável x . Comparando com os demais exercícios resolvidos no caderno, vemos que ele continua a manter a letra h , numa tácita concordância com a negociação feita em sala de aula e por ele implementada.

Quanto à categoria 1 – usar a definição para resolver um exercício – os registros do caderno indicam dificuldades que o aluno experimentou para resolver as tarefas teóricas. No exercício 1, o aluno não completa a tarefa porque não realiza a passagem ao limite e conclui que a derivada no ponto $x=1$ é 2. Ele não chegou à conclusão do exercício 2. Há visivelmente duas dificuldades manifestadas pelo aluno, uma é algébrica e a outra parece residir na passagem ao limite.

Na categoria 2 – com cálculo direto - encontrar a solução a partir de regras dadas – após a apresentação das regras de derivação, a dificuldade teórica desaparece e o aluno consegue obter sucesso na resolução da maioria dos exercícios propostos por Palma Fernandes, pelo menos aqueles referentes a derivadas de funções polinomiais. Estes exercícios possuem os seguintes enunciados: derivar as funções, que podem ser resolvidas conhecendo e aplicando as regras de derivação; determinar o sentido da variação das funções nos pontos considerados; determinar os declives dos gráficos das funções.

Entretanto, nem todas as regras estão bem aplicadas, conforme o caderno evidencia. Por exemplo, no caderno a regra do quociente (figura 6) está formulada corretamente; entretanto, ao resolver um dos exercícios do livro, ele não consegue aplicar a regra e, numa provável autoavaliação (já que a letra é muito semelhante à do aluno), anota a palavra “mal” (abaixo na figura 6), pois sabe que não fez corretamente o exercício 32 do livro, uma vez que todos possuíam respostas.

Figura 6: Fragmentos do caderno de António Almeida

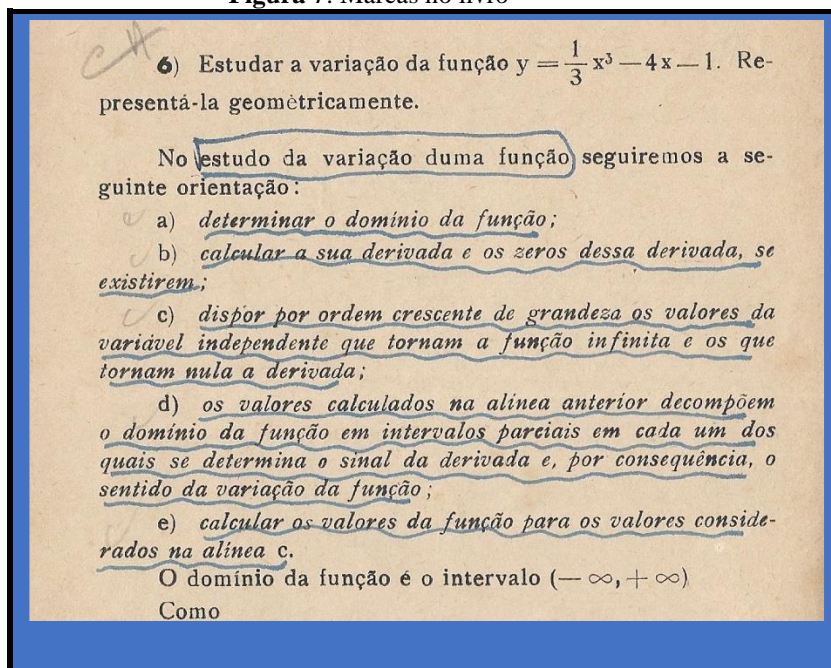


Fonte: Caderno de António Almeida, 6º Ano, p. 67 e 73. acervo particular de uma das autoras

Na categoria 3 – aplicações, tarefas envolvendo aplicações do conceito de derivada – as tarefas referentes a máximos e mínimos parecem ter sido bem compreendidas, pois ele as resolve com acerto. Nesta categoria, de aplicações, os enunciados são os seguintes: estudar a variação das funções, achar os domínios, máximos e mínimos relativos e encontrar as assíntotas caso existam.

As marcas no livro do tipo sublinhado (Figura 7) é outro testemunho da utilização do livro pelo aluno Ant3nio Almeida. Como 3 um dos trechos mais longos que mereceram esta sinaliza33o, pode significar que o aluno atribuiu muita import3ncia 3 orienta33o que o autor do livro forneceu.

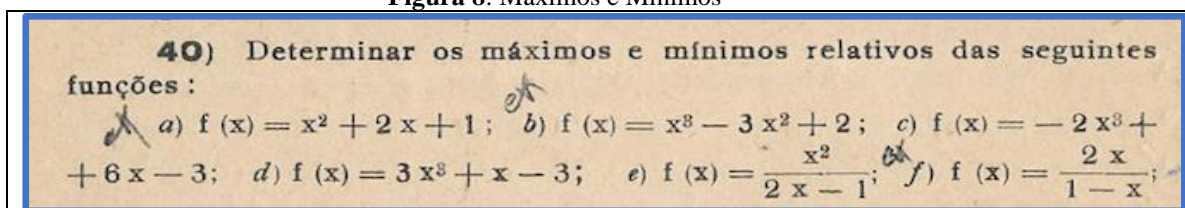
Figura 7: Marcas no livro



Fonte: Livro 1955, p. 52

No fragmento da figura 8, veem-se os vest3gios do uso do livro pelo aluno, quando este assinala o que podem ter sido os exerc3cios feitos.

Figura 8: M3ximos e M3nimos



Fonte: Livro 1955, p. 56

No caderno do aluno, a resolu33o da letra b do exerc3cio 40 est3 apresentada na figura 9.

Figura 9: Exerc3cio de m3ximos e m3nimos resolvido no caderno

Determinar máximos e mínimos

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

1- Achar-se o domínio neste caso $(-\infty + \infty)$
 2- Pontos de descontinuidade não há!

3- Achar-se a derivada; zero da derivada (chamar-se a derivada a 0)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \quad 3x(x-2) = 0$$

mas para o estudo de função

$-\infty$	0	2	$+\infty$
	+	-	+
	crescente ↘		↗

4- Fazer agora a representação gráfica

$f = x^3 - 3x^2 + 2$

x	f
-1	-2
0	2
1	0
2	-2

Fonte: Caderno de António Almeida, 6º Ano Acervo particular de uma das autoras

A resolução algébrica apresentada na figura 9 mostra que houve entendimento do aluno neste exercício, entretanto a representação geométrica indica a dificuldade que ele teve de traçar uma curva com poucos pontos escolhidos, isto por não perceber que a função não era formada por pedaços lineares.

Os tipos de exercícios identificados no livro e caderno dizem respeito às três categorias selecionadas: encontrar a derivada de uma função num ponto específico utilizando a definição; calcular a derivada; aplicar a derivada às questões de variação das funções.

CONCLUSÕES

Retomando a questão investigativa – identificar e analisar, no livro *Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética* para o 6º ano dos liceus de Palma Fernandes – livro este destinado ao ensino secundário de matemática em Portugal – as tarefas resolvidas e propostas sobre o conceito de derivada comparando-as com as tarefas que constam no caderno de um aluno da década de 1950 – concluímos que: os exercícios do livro e do caderno eram predominantes e estavam de acordo com o programa vigente à época. Os registros das atividades práticas – exercícios – no caderno, eram idênticos aos mesmos propostos no livro de Palma Fernandes de 1955, o que comprova o uso efetivo daquele livro. Além disso, as anotações feitas no livro são “pegadas”, “rastros”, do uso do livro pelo aluno e estão em consonância com Benito (2017); Pasquale (2018); Martinez-Valcárcel (2016) que afirmam: a cultura escolar, pode ser lida nos materiais nela “produzidos”, os quais nos “dizem” o que foi ensinado, como foi ensinado e quando foi ensinado. Os exercícios resolvidos e categorizados em três tipos, dizem respeito à introdução do conceito de derivada no secundário e abrangem àqueles que são teóricos; compreendem aqueles de resolução imediata a partir das regras de derivação e as aplicações das derivadas às questões de máximos e mínimos. Estão ausentes nesse período os problemas de aplicação de máximos e mínimos às situações concretas. Livro e caderno, elementos estruturantes da cultura escolar, trazem o passado para perto de nós e nos convidam a refletir sobre as práticas de sala de aula na metade do século XX, as quais talvez não sejam muito distintas daquelas de nossos dias.

REFERÊNCIAS

BENITO, Agustín Escolano. La cultura material de la escuela y la educación patrimonial. **Educativo Siglo XXI**, (28), 2, p. 43-64, 2010.

BENITO, Augustin Escolano. **A escola como cultura**: experiência, memória e arqueologia. Campinas: Alínea, 2017.

BURKE, Peter. **Testemunha Ocular: história e imagem**: EDUSC: Florianópolis, p. 14, 2004.

CANAVARRO, Ana Paula. **Fios de memória. Liber amicorum para Fernanda Henriques**. Ribeirão: Edições Humus, 2018.

DOMINGOS, António. **Normas sociomatemáticas nas aulas do ensino superior**, 2005. Disponível em <http://hdl.handle.net/10362/5268>. Acesso em: 3 jul. 2023.

FERNANDES, António Nascimento Palma. **Elementos de Geometria para os 4º, 5º e 6º anos dos Liceus**. 1ª ed. Braga. Livraria Cruz, 1944.

FERNANDES, António Nascimento Palma. **Elementos de Geometria para os 1º, 2º e 3º anos dos Liceus**. 5ª ed. Braga: Livraria Cruz, 1949.

FERNANDES, António Nascimento Palma. **Exercícios de álgebra, trigonometria e arithmetica racional para o 6º ano dos liceus**. 8ª ed. Depositários. Lisboa: Livraria Didáctica; Braga: Livraria Cruz, 1955.

MARTINEZ-VALCÁRCEL, Nicolás. El uso del libro de texto de Historia de España en bachillerato: entre el aula y la casa. **Revista História da Educação**, 20 (50), p. 69-73, 2016. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/3216/321646882007.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2023.

MATOS, José Manuel; RODRIGUES, Alexandra Sofia. A matemática na aula, um estudo histórico iconográfico. **Revista de História da Educação**, v. 24, p. 1-39, 2020.

OTTE, Michael; BARROS, Luiz Gonzaga. About complementary. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática** 10 (1), p. 2-7, 2017. Disponível em: <https://jieem.pgsscogna.com.br/jieem/article/view/4847>. Acesso em: 5 jul. 2023.

PASQUALE, Rosana. Marginalia en los manuales contextualizados de FLE. Un peritexto evocador. In: Perduca, F. (Comps.). **Actas de las IV Jornadas Internacionales sobre formación e investigación en lenguas y traducción “Lenguas en el cruce de fronteras: políticas, prácticas y saberes**. Buenos Aires: IES en Lenguas Vivas “Juan R. Fernández”, p. 353-58, 2018.

PAULO, José Silva. António do Nascimento Palma Fernandes. Resenha do livro Exercícios de Aritmética racional, álgebra e métodos geométricos. **Gazeta de Matemática**, ano v, n. 20, p. 31, 1944.

PONTE, João Pedro. O ensino da matemática em Portugal: uma prioridade educativa? In: **O ensino da matemática – situação e perspectivas**. actas/org. Conselho Nacional de Educação. Lisboa: Conselho Nacional de Educação, 2003.

SILVA, José Sebastião. **Guia para a utilização do compêndio de Matemática** (2º vol.) Lisboa. Edição GEP, 1975.

VAZ, Francisco António. O ensino dos jesuítas na Universidade de Évora: o uso didático de azulejos no Colégio do Espírito Santo. **Revista História da Educação** (Online), v. 24, p. 1-26, 2020. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/asphe/article/view/93431/pdf>. Acesso em: 20 jun 2023.

VIDAL, Diana Gonçalves. No interior da sala de aula: ensaio sobre cultura e prática escolar. **Currículo sem Fronteiras**, v. 9, n. 1, p. 25-41, 2009.