ACERVO
BOLETIM DO CENTRO DE DOCUMENTAÇÃO DO GHEMAT-SP

# POTENCIALIDADES DE UMA TAREFA PARA PROMOVER O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR NO TÓPICO FRAÇÕES

## POTENTIALS OF A TASK TO PROMOTE THE TEACHER'S SPECIALIZED KNOWLEDGE ON THE TOPIC OF FRACTIONS

Alessandra Rodrigues de Almeida[1]
ORCID iD:// https://orcid.org/0000-0002-6329-8655

Miguel Ribeiro[2]
ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-3505-4431

**Submetido:** 16 de fevereiro de 2021 **Aprovado:** 01 de março de 2021

**RESUMO**

O tópico das frações é um daqueles em que a pesquisa mostra que tanto alunos como professores revelam dificuldades, o que indica a necessidade de foco e discussão aprofundada a respeito das especificidades do conhecimento do professor, pois esse conhecimento é o fator que mais impacta nos resultados dos alunos. O desenvolvimento e a melhoria desse conhecimento especializado – que assumimos na perspectiva do Mathematics Teachers Specialized Knowledge (MTSK) – demanda contextos formativos e discussão de tarefas com essa intencionalidade. Aqui discutimos o que denominamos de "tarefa para a formação" e especificamos a discussão no âmbito da (re)construção do todo – um dos assuntos centrais para o entendimento das frações. A análise e as discussões sobre a tarefa permitiram propiciar um contexto rico e real para a formação de professores no tópico frações e ampliar o conhecimento matemático requerido aos alunos, envolvendo diferentes compreensões como suporte para a resolução de problemas.

**Palavras-chave:** Tarefas para a formação; MTSK; Frações

**ABSTRACT/**

The topic of fractions is one in which research reveals students' and teachers' difficulties, revealing the need for a specific focus and discussion regarding the specificities of the teachers' knowledge, since such knowledge is be the factor that most impacts on students' outcomes. The development and enhancement of this specialized knowledge – which is undertaken from the perspective of the Mathematics Teachers Specialized Knowledge (MTSK) – requires training contexts and discussions of tasks with this intentionality. In the present work, we discuss what is the task for teacher training and specify the discussion in the scope of the (re)construction of the whole – one of the central issues for understanding fractions. The analyses and the discussion about the task allowed the provision of a rich and real context for teacher training regarding the subject of fractions, surpassing the knowledge required for the students, involving different understandings as support for problem-solving activities

**Keywords:** Teacher training task; MTSK; Fractions.

### INTRODUÇÃO

O conhecimento dos professores de e que ensinam matemática tem sido objeto de investigações em diferentes perspectivas, desde abordagens generalistas que não consideram nenhuma especificidade das áreas de conhecimento até aquelas que consideram essas

[1] Doutora em Ensino de Ciência e Matemática (UNICAMP). Docente da Faculdade de Educação da PUC Campinas e Pesquisadora Colaboradora da Faculdade de Educação UNICAMP, Campinas, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Maria Monteiro Merlo, 51 Parque Modelo, Amparo, SP, Brasil. CEP: 13.905-525 E-mail: alessandra.almeida@puc-campinas.edu.br.
[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidad de Huelva, Espanha (UHU). Docente da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP, Brasil. E-mail: cmribas78@gmail.com

especificidades no conhecimento matemático e pedagógico (RIBEIRO, 2018). Várias pesquisas evidenciam que o professor e o seu conhecimento assumem papel central na aprendizagem e nos resultados dos alunos (BAUMERT et al., 2010; NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004) ). Nesse sentido, entender e desenvolver o conteúdo do conhecimento do professor é uma forma central para melhorar a qualidade das aprendizagens dos alunos – pelo desenvolvimento do conhecimento do professor –, o que só é possível através de formação com esse objetivo específico.

De entre os tópicos matemáticos mais problemáticos para os alunos, podemos encontrar os racionais, em particular a sua representação em fração. Muitas dessas dificuldades dos alunos são já conhecidas há bastante tempo (BEHR et al., 1983) e podem ter origem, por exemplo, (i) na multiplicidade de significados atribuídos às frações e (ii) na conceitualização da unidade em diversos problemas ou situações envolvendo frações. Por essa razão, seria de esperar que já não fizessem parte das dificuldades atuais de alunos e professores, mas pesquisas mais recentes mostram ainda essa predominância (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019; LAMON, 2007). De entre essas dificuldades para o entendimento das frações, encontra-se compreender o papel do todo e os diferentes tipos de todo (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019; PINTO; RIBEIRO, 2013).

Considerando que a prática matemática do professor se sustenta na implementação e na discussão de tarefas (MASON; JOHNSTON-WILDER, 2006; RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2016); que as especificidades do conhecimento matemático do professor não se desenvolvem pela prática, e são necessárias discussões intencionais com esse fito (RIBEIRO, MELLONE; JAKOBSEN, 2013); e que as tarefas para os alunos e para a formação de professores têm de perseguir objetivos complementares (RIBEIRO, 2020), torna-se essencial uma discussão com foco nessas tarefas para a formação (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, no prelo).

Neste artigo sintetizamos algumas das discussões que temos vindo a desenvolver no contexto do CIEspMat,[3] no âmbito das tarefas para a formação de professores, que contribuam para desenvolver o conteúdo do conhecimento do professor e assumir as especificidades desse conhecimento na linha do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK[4]

[3] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. www.ciespmat.com.br

[4] Optamos por manter a nomenclatura em Inglês, pois esta é uma conceitualização do professor reconhecida em nível internacional, e a tradução desvirtuaria não apenas o sentido, mas, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

(CARRILLO et al., 2018). Aqui apresentamos e discutimos uma tarefa para a formação, conceitualizada para promover o desenvolvimento do conhecimento especializado do professor no tópico de frações, em particular no contexto do todo.

**ALGUMAS NOTAS TEÓRICAS**

Um dos tópicos matemáticos considerados mais complexos a serem trabalhados nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental refere-se aos números racionais, na sua representação em fração (BEHR et al., 1983; LAMON, 2007). O conhecimento das frações representa uma ampliação significativa do conhecimento dos números naturais pelos alunos (KIEREN, 1995), e sua compreensão está associada ao desenvolvimento de estruturas cognitivas essenciais para a aprendizagem matemática ao longo da trajetória escolar (GRAÇA; PONTE; GUERREIRO, 2018; PINTO; RIBEIRO, 2013; SILVA; PIETROPAOLO; PINHEIRO, 2016).

No que se refere às dificuldades dos alunos na aprendizagem das frações, a literatura aponta incompreensões associadas a diferentes aspectos: pouco entendimento sobre a relação entre o numerador e o denominador numa situação fracionária com o sentido parte-todo (VASCONCELOS; MAMEDE; DORNELES, 2017); desconhecimentos a respeito da comparação, da equivalência e da simplificação de frações (MONTEIRO; GROENWALD, 2014; VASCONCELOS; MAMEDE; DORNELES, 2017); incompreensões e inabilidades a respeito de unidade (todo) e partição (BEHR et al., 1983). Agregam-se às dificuldades documentadas em pesquisas realizadas com alunos da Educação Básica a natureza complexa e multifacetada do próprio conceito de fração (MAGINA; BEZERRA; SPINILLO, 2009) e os diferentes significados que a fração pode assumir, a depender do contexto em que se insere (BEHR et al., 1983; MONTEIRO; PINTO, 2005).

É importante salientar que, no trabalho que desenvolvemos, assumimos sentidos e significados de forma distinta do que fazem os autores anteriormente referidos: falamos de sentidos das frações, considerando os sentidos de parte-todo, quociente, razão, operador e medida, e não os consideramos, portanto, significados. Esta mudança de perspectiva de sentido em relação a significado sustenta-se na ideia de que se considera o Sentido de Número (natural e racional) e de Operação e, portanto, subconjuntos desse sentido têm de ser elementos da mesma natureza. Assim, nos trabalhos que desenvolvemos, as frações possuem diferentes sentidos, aos quais os contextos dos problemas ou situações específicas permitem atribuir significado.

As pesquisas relacionadas ao conhecimento do professor a respeito das frações também apontam fragilidades que necessitam ser consideradas. Observa-se que os professores compreendem e focam seu trabalho apenas em alguns dos sentidos das frações, mais especificamente como parte-todo; fazem alusões ao significado como quociente (ROJAS; FLORES; CARRILLO, 2015; PINTO; RIBEIRO, 2013); e centram as representações em figuras planas (representação figural) e simbólica, de forma a expressar com uma fração "as partes pintadas" (ROJAS; FLORES; CARRILLO, 2015; SILVA; ALMOULOUD, 2008), ignorando outras possibilidades e não discutindo aspectos centrais neste tópico como a importância e o papel do todo (MONTEIRO; PINTO, 2005).

Considerando que uma das primeiras ideias a serem trabalhadas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sobre frações envolve considerá-la como uma forma de [5]escrever a relação entre uma parte de um todo, e é, inclusive, uma das habilidades que, segundo a *Base Nacional Comum Curricular* – BNCC (BRASIL, 2018), se espera que alunos do 2.º ano desenvolvam, ao considerar metade, terça e quarta parte. Compreender essa relação entre a parte e o todo envolve perceber que as partes têm de ser equivalentes entre si e também em relação ao todo (ALMEIDA; RIBEIRO, 2021). Desenvolver um entendimento do todo, contínuo ou discreto, em situações fracionárias impõe demandas cognitivas adicionais associadas à natureza desse todo; e às relações entre as partes e o todo – a necessidade de que as diferentes partes possam formar de novo esse todo; e à percepção de que o número representa uma determinada quantidade de partes em relação ao todo (TAUBE, 1995). Nesse sentido, o reconhecimento do todo se configura como uma das estruturas de pensamento básicas para a compreensão de números racionais e, de forma associada, também da Medida.

Reconhecendo que a compreensão do conceito de todo é essencial para o entendimento das frações, e que tal compreensão se configura como problemática também para professores (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019; CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006), assumimos como essencial discutir e propor novas abordagens às tarefas para a formação de professores, intencionalmente desenhadas para desenvolver a especificidade do conhecimento do professor, associada a cada um dos tópicos matemáticos. Para essas novas abordagens e conceitualizações tendo em conta as especificidades da prática profissional do professor e, portanto, a natureza, o foco e os objetivos específicos dessa atuação, nosso objetivo é que os alunos entendam o que fazem e por que o fazem, a cada momento, e não apenas repliquem um conjunto de regras associadas a uma prática de passar conteúdos (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, no prelo).

No âmbito da pesquisa que desenvolvemos, as tarefas para a formação de professores, as quais formam parte do que denominamos "Tarefas Formativas" (RIBEIRO; ALMEIDA;

MELLONE, no prelo), têm um papel fundamental na pesquisa e no processo formativo e visam desenvolver as especificidades do conhecimento especializado do professor de e que ensina (ou ensinará) matemática.

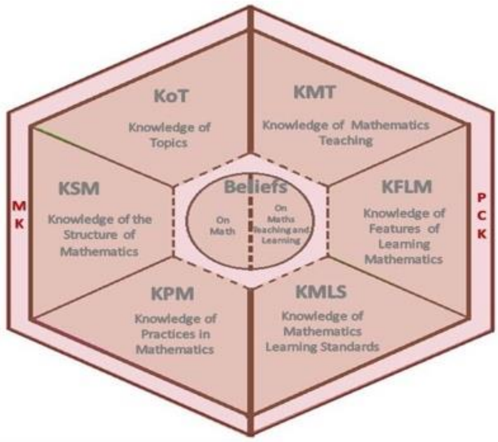
Cada Tarefa Formativa é composta por três documentos articulados: (i) Tarefa para a Formação – tarefa conceitualizada para ser implementada em contexto de formação; (ii) Documento para o professor – que contém as informações essenciais relativas ao conhecimento do professor (que já se conhece de resultados de pesquisa), associado ao tópico abordado na tarefa para a formação: conhecimento matemático e pedagógico; e (iii) Documento do Formador – que se foca nos elementos essenciais para a implementação da Tarefa para Formação no contexto formativo (inicial ou contínuo) e assume as especificidades do conhecimento associado e requerido para essa atuação profissional (RIBEIRO, 2020). Desse modo, qualquer formador que tenha como foco de pesquisa as especificidades do conhecimento do professor pode implementar a tarefa segundo os objetivos com que esta foi delineada.

Há várias conceitualizações teóricas sobre o conhecimento do professor de e que ensina matemática (*Mathematical Knowledge for Teaching* – BALL; THAMES; PHELPS, 2008; *Knowledge Quartet* – ROWLAND; HUCKSTEP; THWAITES, 2005; *Mathematics for Teaching* – DAVIS; SIMMT, 2006; *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – CARRRILLO et al., 2018), bem como várias outras que discutem o conhecimento do professor de um modo geral, sem preocupação com as especificidades associadas ao ensino e à aprendizagem das áreas de conhecimento específicas, como sejam as ideias de Shuman (1986). No âmbito do trabalho que desenvolvemos, sempre consideramos as especificidades do conhecimento do professor de e que ensina ou ensinará matemática, pois entendemos que apenas dessa forma elaboramos pesquisa que tenha impacto na e para a formação profissional do professor nesse âmbito da sua atuação.

Assumir que o conhecimento do professor é especializado – considerando esta ou qualquer uma de muitas outras perspectivas teóricas – tem impacto na forma como se entendem tanto os focos de pesquisa quanto os de formação. Assim, é importante salientar que a conceitualização da tarefa para a formação sempre tem por base resultados de pesquisas anteriores, e a sua implementação sempre ocorre em contextos em que consideramos, de forma imbricada, pesquisa e formação. Portanto, sempre existe uma questão de pesquisa que se busca responder a partir das produções e das discussões dos resolutores – professores ou futuros professores (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, no prelo). Do mesmo modo, temos um objetivo formativo associado ao desenvolvimento do conhecimento especializado dos participantes tanto na dimensão matemática dessa especialização quanto na dimensão pedagógica.

As especificidades do conhecimento do professor que se buscam desenvolver através das tarefas para a formação são consideradas, aqui, na perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK (CARRILLO et al., 2018).

**Figura 1** – Domínios do Mathematics Teacher's Specialised Knowledge




**Fonte**: Carrillo et al. (2018, p. 241)

O modelo teórico e analítico MTSK considera o conhecimento especializado do professor na perspectiva tanto do Mathematical Knowledge (MK) – o conhecimento do professor relacionado ao conhecimento matemático – quanto do Pedagogical Content Knowledge (PCK), que corresponde ao conhecimento do professor referente aos processos de ensino e aprendizagem de cada conteúdo matemático a ser trabalhado nas diferentes etapas escolares. E, de forma complementar, considera também um domínio de crenças do professor sobre a matemática e seu ensino. A separação em subdomínios apresentada no modelo é entendida de modo operacional e, portanto, assumem-se as interdependências entre eles, tendo sempre como pano de fundo a matemática e o seu ensino e aprendizagem (CARRILLO et al., 2018).

O Mathematical Knowledge (MK) está organizado em três subdomínios não hierarquizados: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM). Aqui, em razão do foco que adotamos, não discutimos o conteúdo do conhecimento referente ao KPM.

O *Knowledge of Topics* (KoT) inclui o conhecimento dos conceitos (fenomenologia) e das proposições (teoremas, corolários, axiomas); e de propriedades, procedimentos, classificações, exemplos, fórmulas e algoritmos, com seus respectivos significados e demonstrações. Para organizar os diferentes elementos deste subdomínio foram definidas quatro categorias, que explicitaremos em seguida: (a) definições, propriedades e seus fundamentos; (b) fenomenologia e aplicações; (c) registros de representação; e (d) procedimentos (CARRILLO et al., 2018).

(a) Definições, propriedades e seus fundamentos – esta categoria contempla conhecer uma ampla gama de relações entre conceitos matemáticos associados às propriedades específicas do conteúdo matemático e as fundamentações dessas em processos matemáticos como demonstrações ou teoremas. No âmbito das frações envolve conhecer, por exemplo, que a fração com o sentido parte-todo implica a comparação entre uma parte e um todo; que o denominador indica o número de partes iguais em que o todo está dividido, e o numerador, o número de partes selecionadas, podendo o todo ser contínuo ou discreto (PINTO; RIBEIRO, 2013).

(b) Fenomenologia – inclui o conhecimento do professor acerca dos fenômenos que podem gerar um conhecimento matemático e dos contextos, dos usos e das aplicações de um tópico matemático ensinado. Um exemplo no âmbito das frações envolve conhecer que as frações podem apresentar diferentes sentidos, como parte-todo, quociente, razão, medida e operador, a depender do contexto de que fazem parte (LAMON, 2007). Implica conhecer, também, as relações entre ½, 1/3, ¼, ... e o todo; e entre essas partes e o correspondente complementar.

(c) Registro de representações abrange o conhecimento associado às diferentes formas pelas quais é possível representar um conceito, um processo ou um procedimento matemático, e inclui modelações, representações numéricas, gráficas, verbais e pictóricas. No âmbito das frações, podemos destacar um conhecimento que permita compreender as partes e o todo numa representação do tipo 1/5, numa representação pictórica ou outra, observando significados distintos e diferentes tipos de unidades – contínuas e discretas; e comparar quantidades de diferentes ordens de grandeza (PINTO; RIBEIRO, 2013). Envolve também, por exemplo, conhecer e fazer uso de uma linguagem matematicamente adequada, o que demanda conhecer que, ao verbalizarmos "um quinto é uma parte em cinco", há que garantir que as partes sejam efetivamente congruentes ou equivalentes – e é essencial discutir essas duas possibilidades e as implicações que elas apresentam – e estejam em relação a um mesmo todo. Cabe ainda conhecer diferentes formas de representar uma quantidade – por exemplo, simbólica (numérica) e pictórica –, de modo a que exista correspondência entre elas.

(d) Procedimentos – esta categoria inclui o conhecimento do professor acerca dos procedimentos utilizados para fornecer respostas adequadas às situações específicas e/ou aos problemas. Abrange o conhecimento de como, quando e por que procedimentos são realizados de uma determinada forma e das características dos resultados obtidos (ZAKARYAN; RIBEIRO, 2018). No âmbito das frações envolve, por exemplo, conhecer o porquê de ½ + ½ não ser 2/4 (adicionar numeradores e denominadores); e conhecer que, para determinar um todo contínuo ou discreto, podemos efetuar uma translação da(s) parte(s) que se consideram, e a continuidade ou não do todo vai depender do resultado desse procedimento.

O Knowledge of the Practice of Mathematics (KPM) é caracterizado por um conhecimento com correspondência a práticas típicas do trabalho matemático e está associado ao conhecimento das formas de conhecer, criar ou produzir em matemática, ao conhecimento de aspectos da comunicação matemática, raciocínio e prova. Este subdomínio inclui ainda o conhecimento do uso de linguagem matemática formal, de processos associados à resolução de problemas matemáticos, à capacidade de priorizar e planejar caminhos de solução e à maneira de gerar definições sob certas condições, de acordo com o conteúdo matemático ensinado (FLORES-MEDRANO; AGUILAR-GONZÁLES, 2017). Um exemplo no tópico das frações envolve conhecer que a comparação de frações é uma prática associada à resolução de problemas que envolvam frações equivalentes e relação de ordem entre números racionais positivos.

O Pedagogical Content Knowledge (PCK) contempla também três subdomínios: Knowledge of Mathematics Teaching (KMT); Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM) e Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS). Pelo foco das questões incluídas na tarefa, discutiremos aqui somente o KFLM.

O KFLM está associado ao conhecimento do professor sobre as características de aprendizagem do conteúdo matemático, focando tal conteúdo como objeto de aprendizagem; envolve as formas de aprendizagem, as fortalezas e as dificuldades associadas à aprendizagem; e engloba conhecimento sobre os erros, os obstáculos e as dificuldades associados à matemática geral e a temas concretos (FLORES et al., 2014). Um exemplo no âmbito das frações está associado ao conhecimento de que, ao dividir o todo em partes, alguns alunos não percebem a necessidade de todas as partes serem iguais ou contam as partes incorretamente; ou ainda podem ter dificuldade em relacionar a parte com o todo correspondente (POST; BEHR; LESH, 1986).

## UM EXEMPLO DE TAREFA PARA A FORMAÇÃO E AS DISCUSSÕES ASSOCIADAS

A tarefa aqui discutida é parte de uma Tarefa Formativa (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, no prelo) e tem sido implementada em contextos formativos para professores e futuros professores. As questões incluídas nesta tarefa formativa focam-se no desenvolvimento do conhecimento associado a alguns dos subdomínios do MTSK, no âmbito do tópico de frações, em particular no que se refere ao KoT, ao KPM e ao KFLM.

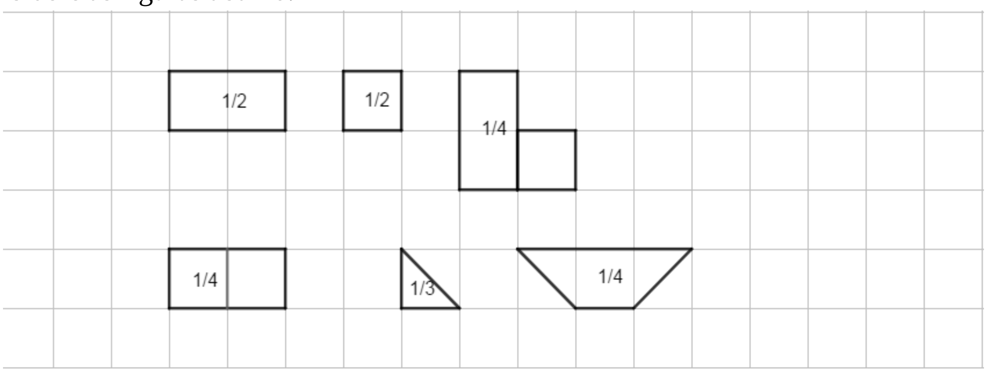
As tarefas para a formação são usualmente constituídas de duas partes (RIBEIRO; ALMEIDA; MELONE, no prelo): a Parte I tem o objetivo de desenvolver as especificidades do conhecimento dos resolutores no âmbito do MTSK, e a Parte II foca-se no denominado Conhecimento Interpretativo (DI MARTINO; MELLONE; RIBEIRO, 2019; JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014). Aqui discutiremos somente a Parte I de uma tarefa para a formação denominada de “Vamos Construir” (Figura 2).

A Parte I tem como ponto de partida uma tarefa que seja passível de os alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental resolverem – nível em que os professores ensinam –, e serve de motivação para desenvolver o conhecimento dos resolutores em uma perspectiva mais ampla do que somente discutir como poderia ser implementada em sala de aula (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, no prelo). Essa tarefa para os alunos encontra-se inserida em um retângulo, para demarcar que é o ponto de partida; e, logo depois dela, encontram-se algumas questões especificamente desenhadas, associadas a subdomínios e categorias do MTSK.

**Figura 2.** Tarefa para Formação

**Tarefa: Vamos construir o todo**

Considere as figuras abaixo.




Copie as figuras para a folha quadriculada e reconstrua, de pelo menos três formas distintas, o todo. Justifique por que são distintas ou a impossibilidade de reconstruir o todo.

1. Considere a tarefa anterior:
   a) Resolva a tarefa por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino).
   b) Qual considera ser o foco matemático que a tarefa anterior pretende possibilitar ou discutir (que conhecimento matemático tem por objetivo desenvolver nos alunos)? Justifique adequadamente a sua resposta.
2. Será possível construir um todo discreto a partir das quantidades indicadas na tarefa? Se sim, apresente pelo menos uma resposta possível; se não, justifique por quê.

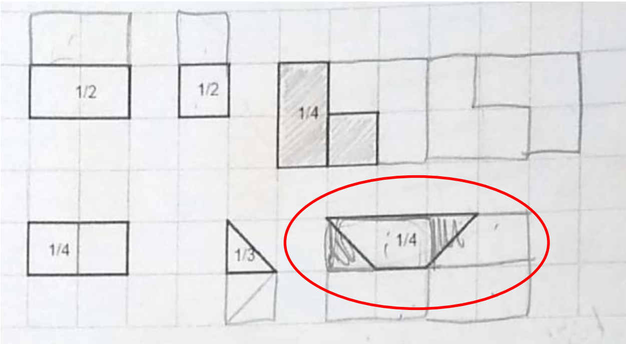
| |
|---|
| 3. Que respostas, corretas e incorretas, alunos do 3.º ano podem fornecer para a tarefa anterior? Justifique essa (in)correção. |

**Fonte**: Elaboração dos autores

A tarefa para o aluno busca permitir discutir e desenvolver o entendimento e o conhecimento matemático associado à relação entre a parte e o todo, mas com uma abordagem não típica, que tem origem na parte. Ela solicita a construção do todo e possibilita discutir diferentes soluções para um mesmo problema (pelo menos três, todos distintos). Uma adequada resolução demanda identificar quantas partes correspondem ao complementar da parte indicada para que seja possível obter o todo. Notemos que este todo pode ser contínuo ou discreto. Outro aspecto a destacar na tarefa são as relações entre as representações pictóricas e as partes associadas a distintos "todos"; por exemplo, figuras semelhantes (todo) como o retângulo, que pode representar ½ de um todo e ¼ de outro. Aqui, iguais não significa necessariamente congruentes, mas é preciso sempre significar partes equivalentes,[6] e este é um dos aspectos centrais a discutir do conhecimento especializado.

Ao longo da discussão das questões da tarefa para a formação, apresentam-se algumas produções de professores, coletadas em contextos de formação, para evidenciar a necessidade deste tipo de foco de tenção no conhecimento do professor.

**Figura 3**. Produção de professores, associadas a completar o todo




**Fonte**: Arquivo dos autores

Há a tendência, por parte dos professores, de completar o todo, replicando a(s) parte(s) correspondente(s) (figuras congruentes) e considerando exclusivamente todos contínuos. Apenas em uma situação – circulada a vermelho – não foi tomada a opção de registrar três outros trapézios, mas sim de formar um retângulo com a mesma área, tendo como foco a equivalência entre áreas que compõem as partes.

---

[6] Deixamos aqui de fora as discussões vinculadas a figuras isoperimétricas e as discussões associadas às implicações para o conhecimento dos alunos e do professor para o ensino da matemática.

A questão foi incluída na tarefa, de modo a focar, também, o uso de diferentes representações com correspondência entre si, como sejam a representação pictórica e a representação numérica, para representar a parte e o complementar, a fim de reconstruir o todo. O recurso a múltiplas representações é uma abordagem potente para desenvolver o entendimento dos alunos (MONTEIRO; PINTO, 2005), e, portanto, conhecer essas múltiplas representações e correspondências entre elas forma parte do conhecimento do tópico de frações (KoT). Importa salientar que, usualmente, na primeira vez que se implementa esta tarefa em contexto de formação, os professores, trabalhando individualmente, referem que existe apenas uma única forma de completar o todo, o que revela também a unicidade do seu espaço solução (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014) e a necessidade de uma discussão focada no papel das múltiplas representações e da resolução de problemas.

As discussões anteriores associam-se ao item 1a), em que o objetivo é incentivar os resolutores a organizar suas compreensões referentes ao tópico, sem cogitar "o que os alunos poderiam responder"; e isso demanda mobilizar, e desenvolver, o seu conhecimento dos tópicos, para que se amplie e aprofunde o que se espera os alunos tenham a oportunidade de vir a conhecer no âmbito da fenomenologia, registros de representação e propriedades das frações e, em particular, do todo e do seu papel no entendimento dos racionais.

O item 1b) complementa o anterior, pois busca contribuir para que os resolutores descrevam explicitamente o conhecimento que consideram deter sobre o tópico – qual o objetivo que se pretende alcançar em termos das aprendizagens matemáticas dos alunos – e ir assim direcionando a discussão para o conhecimento matemático que nos cumpre enquanto professores.

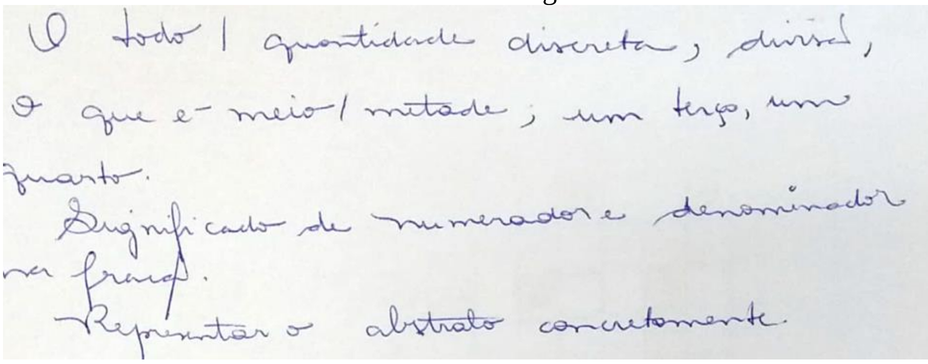
Neste item, os professores tendem a apresentar como objetivos essencialmente o observável na representação, sem equacionar o fato de que toda a tarefa matemática teria de estar associada a um objetivo matemático de aprendizagem dos alunos, o que demanda que o formador desenvolva uma discussão sobre o conhecimento matemático do professor, associado às frações (RIBEIRO, 2020).

**Figura 4**. Produções dos professores item 1b

Imagem 1

b) A relação da parte com o todo.

Imagem 2



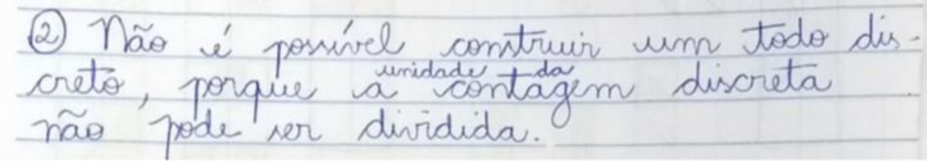
O todo/ quantidade discreta, divisão, o que é meio/metade, um terço, um quarto.
Significado de numerador e denominador na fração.
Representar o abstrato concretamente.

**Fonte**: Arquivo dos autores

Os professores referem como objetivo a relação parte-todo, mas não focam a ideia de complementar – aspecto central da tarefa. Na Imagem 2 efetuam uma listagem de diferentes aspectos associados ao conhecimento das frações que, mais uma vez, se encontram explícitos na tarefa – representações numéricas (significado de numerador e denominador) de meio/metade, um terço, um quarto – e incluem como conhecimento associado à tarefa "quantidade discreta", mas esta inclusão aqui não tem tipicamente correspondência com as suas produções no item 1a), em que apenas representam o todo como contínuo.

A questão 2 pretende pressionar o conhecimento do professor para sair do espaço de referência contínuo e entender e desenvolver o conhecimento associado à possibilidade de todos discretos (KoT – fenomenologia), de representação de quantidades discretas (Kot – representações); e ao uso de uma linguagem adequada, relativa às representações e aos conceitos em discussão (KPM). Nesse sentido, o foco da questão está em discutir a ideia do "todo" e compreender as frações não somente como a comparação entre o "inteiro" ou a "unidade" e suas partes, o que reduz o uso das frações a quantidades contínuas e/ou apenas com o sentido parte-todo (LAMON, 2007; PINTO; RIBEIRO, 2013).

**Figura 5**. Produções de professores para questão 2


② Não é possível construir um todo discreto, porque a unidade da contagem discreta não pode ser dividida.

Não é possível construir um todo discreto, porque a unidade de contagem discreta não pode ser dividida

**Fonte:** elaborado pelos autores

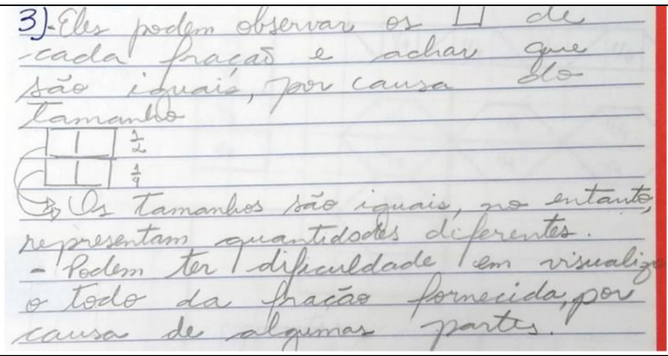
Várias respostas corretas podem ser apresentadas, associando a representação pictórica de uma parte da fração a uma “quantidade” (KoT – representações) ou a um elemento de um conjunto que pode compor um todo discreto (KoT - fenomenologia) – as partes e o todo podem estar associados a diferentes tipos de unidades – contínuas e discretas (PINTO; RIBEIRO, 2013).

No entanto, nem todas as respostas apresentadas revelam um conhecimento adequado, e são essas que nos permitem identificar onde a formação é mais necessária e qual conteúdo do conhecimento é importante desenvolver. Ao referirem que não é possível construir um todo discreto porque a unidade não pode ser dividida, revelam um conhecimento parcial de fração como parte-todo e assumem uma interpretação literal incorreta da verbalização usual de fração – por exemplo, 1/3 representa uma das três partes iguais, na forma como efetuamos tipicamente a leitura –, conhecimento que pode limitar o ensino das frações no que se refere tanto aos sentidos quanto às suas representações (ALMEIDA; RIBEIRO, 2019).

A questão 3 foca especificamente o conhecimento do professor a respeito das características de aprendizagem do conteúdo matemático (KFLM) e, ao buscar contribuir para discutir – e aceder a ele – o conhecimento das maiores dificuldades de alunos de um ano específico, direciona esse conhecimento para as especificidades e busca sair do espaço de “não sei o que os alunos podem responder, pois não ensino nesse ano”.

Algumas das possíveis dificuldades consideradas dificuldade envolvem a identificação das representações parte-todo no contexto de quantidades discretas (MONTEIRO; GROENWALD, 2014) e a conceitualização da unidade (LAMON, 2002).

**Figura 6**. Produções de professores para a questão 3

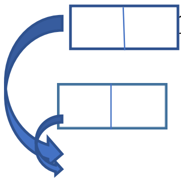

3)-Eles podem observar os □ de cada fração e achar que são iguais, por causa do tamanho

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$

Os tamanhos são iguais, no entanto, representam quantidades diferentes.
- Podem ter dificuldade em visualiz o todo da fração fornecida, por causa de algumas partes.

3- Eles podem observar os □ de cada fração e achar que são iguais, por causa do tamanho




Os tamanhos são iguais, no entanto, representam quantidades diferentes.

Podem ter dificuldade em visualizar o todo da fração fornecida por causa de algumas partes.

**Fonte**: arquivo dos autores

Uma das dificuldades apontadas pelos professores é, geralmente, associada a compreender a relação entre a representação pictórica e numérica da fração, pois são apresentadas representações pictóricas semelhantes, como as partes que recompõem "todos" de referência distintos (KFLM). Estas discussões centram-se em assumir a dificuldade de entender que ½ e ¼ podem ser equivalentes, quando se referem a todos distintos. É também essencial considerar a dificuldade apontada de visualizar o todo a partir das partes, e ela pode estar associada aos exemplos prototípicos explorados usualmente.

Este tipo de questionamento da tarefa permite ainda discutir as potencialidades da tarefa para desenvolver o conhecimento especializado do professor a respeito das frações e da relevância do papel do todo para esse conhecimento conceitual.

## ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando as discussões associadas à importância do conhecimento do professor como um fator que contribui de forma efetiva para melhoria das aprendizagens e para o desempenho satisfatório dos alunos em sala em sala de aula, enquanto pesquisadores e formadores de professores, cumpre-nos o papel de promover esse conhecimento nos diferentes contextos de formação de professores e futuros professores de/e que ensinam matemática, nos quais estamos envolvidos. Na perspectiva do trabalho que desenvolvemos, entendemos o conhecimento do professor como especializado para a profissão da docência (MTSK), o que implica contemplar essa especialização na conceitualização de tarefas e nas discussões a elas associadas nos diferentes contextos formativos em que atuamos.

Na perspectiva apresentada, nas Tarefas Formativas conceitualizadas pelo nosso grupo, o modelo MTSK orienta a escolha dos subdomínios do conhecimento para construção das questões a serem discutidas, e se configura como elemento central do processo formativo, associado ao conhecimento do formador (RIBEIRO, 2020). As Tarefas Formativas são entendidas como meios para desenvolver, de forma intencional, o conhecimento do professor, considerando as especificidades deste, nomeadamente aspectos do conhecimento do conteúdo (PINTO; RIBEIRO, 2013), e ultrapassando o nível da discussão de generalidades e o foco exclusivo nas dimensões pedagógicas do conhecimento (RIBEIRO, 2018).

Muitas questões ainda estão em aberto, no que se refere às especificidades das tarefas para formação do professor, como, por exemplo: (i) Que elementos centrais do conhecimento do professor sobre as frações devem ser priorizados para compor um conjunto de Tarefas Formativas, por forma a desenvolver o conhecimento especializado desse profissional? (ii) Quais especificidades do conhecimento do professor que ensina matemática na Educação Infantil devem ser foco das tarefas formativas para docentes dessa etapa educacional?

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado do professor que ensina Matemática no tópico das frações: discutindo quantidades discretas. **Trilhas Pedagógicas**, Pirassununga, v. 9, n. 11, p. 126-143, 2019.

ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado do professor no âmbito das frações: uma discussão sobre a importância da unidade. In: BIANI, R. P.; LONGO, C. A. C.; LORENZATO, S. **Constituindo aprendizagens e saberes em contextos formativos para o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática**. Campinas, SP: FE/Unicamp, 2021. p. 47-73.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, New York, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BAUMERT, J. et al. Teachers´mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom and student progress. **American Educational Research Journal**, Washington DC, v. 47, n. 1, p. 133-180, 2010.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER E. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-125.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 15 jan. 2021.

CAMPOS, T. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Revista Educação Matemática Pesquisa** – PUC, São Paulo, v. 8, n. 1, p.125-136, 2006.

CARRILLO, J. et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, Reston, p. 236-256, 2018.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 3, p. 293-319, 2006.

DI MARTINO, P.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. Interpretative knowledge. In: LERMAN, S. **Encyclopedia of Mathematics Education**. Dordrecht: Springer International Publishing, 2019. p. 424-428.

FLORES-MEDRANO, E.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A. Profundizando en el conocimiento de la práctica matemática. Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. In: JORNADAS DEL SEMINARIO E INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE HUELVA, 3., 2017. **Actas ...** Huelva, 2017. p. 38-47.

FLORES-MEDRANO, E. et al. Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. In: CARRILLO, J. et al. (Ed.). **Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas**: Universidad de Huelva Publicaciones, v. 1, 2014. p. 57-72.

GRAÇA, S.; PONTE, J. P.; GUERREIRO, A. As frações no 5. º ano de escolaridade: Que conhecimentos revelam os alunos? In: ALVES, D. et al. (Org.). **Investigação, práticas e contextos em educação**. Livro de Atas Conferências, 2018. p. 175-183.

JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education,** Aarhus, n. 3-4, v. 19, p. 135-150, 2014.

KIEREN, T. E. Creating spaces for learning fractions. In: SOWDER J. T.; SCHAPPELLE, B. P. (Ed.). **Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades**. Albany: State University of New York, 1995. p. 31-66.

LAMON, S. Part – Whole comparisions with unitizing. In: LITWILLER, B.; BRIGHT, G. (eds): **Making sense of fractions, ratios, and proportions**. Reston VA: NCTM *yearbook*, 2002.

LAMON, S. Rational numbers and proportional reasoning. In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook ok mathematics teaching and learning.** Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007. p. 629-667.

MAGINA, S.; BEZERRA, F. B.; SPINILLO, A. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração: uma experiência de ensino. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 90, n. 22, p. 489-5105, 2009.

MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. St Albans: Tarquin, 2006.

MONTEIRO, A. B.; GROENWALD, C. L. O. Dificuldades na aprendizagem de frações: reflexões a partir de uma experiência utilizando testes adaptativos. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** Santarém, v. 7, n. 2, p. 03-135, 2014.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. A aprendizagem dos números racionais. **Quadrante**, Lisboa, v. 14, p. 89-107, 2005.

NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. How large are teacher effects? **Educational Evaluation and Policy Analysis**, Washington, v. 6, n. 3, p. 237-257, 2004.

PINTO, H.; RIBEIRO, M. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos–o sentido de número racional. **Da investigação às práticas**, Lisboa, v. 3, n. 1, p. 80-98, 2013.

POST, T.; BEHR, M.; LESH, R. Research-based observations about children's learning of rational number concepts. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Framingham: Winter Edition, v. 8, n. 1, p. 39-48, 1986.

RIBEIRO, M. Das generalidades às especificidades do conhecimento do professor que ensina matemática: metodologias na conceitualização (entender e desenvolver) do conhecimento interpretativo In: OLIVEIRA, A. M. P.; ORTIGÃO, M. I. R. (Org.) **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática.** Brasília: SBEM, 2018. p. 167-185.

RIBEIRO, M. Discutindo o conhecimento especializado do formador de professores de e que ensinam matemática - um exemplo focando tarefas para a formação. In: TRALDI JR; TINTI, A. D. S.; RIBEIRO, R. M. (Org.). **Formação de professores que ensinam matemática:** processos, desafios e articulações com a educação básica. São Paulo: SBEM, 2020. p. 241-257.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. R.; MELLONE, M. Desenvolvendo as especificidades do conhecimento interpretativo do professor e tarefas para a formação. In: GIRALDO, V.; VIOLA, J.; ELIAS, H. R. (Ed.). **Problematizações sobre a formação matemática na licenciatura em matemática.** [s.l.] SBEM. No prelo.

RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Give sense to students' productions: a particular task in teacher education. In: **International Symposium Elementary Maths Teaching**, 2013, Czech Republic. Anais. Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education, 2013. p. 273-281.

RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Interpreting students' non standard reasoning: insights for mathematics teacher education practices. **For the Learning of Mathematics**, v. 36, n. 2, p. 8-13, 2016.

ROJAS, Nielka; FLORES, Pablo; CARRILLO, José. Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. ***Bolema:*** **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 143-166, 2015.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 8, n. 3, p. 255-281, 2005.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching**. Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, A. F. G.; PIETROPAOLO, R. C.; PINHEIRO, M. G. C. Conhecimento matemático para o ensino das frações: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais. **Boletim GEPEM**, Seropédica, v. 69, p. 118-140, 2016.

SILVA, M. J. F. S.; ALMOULOUD, S. A. As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 55-78, 2008.

TAUBE, S. R. Reconstructing the whole: A gauge of fraction understing. English, U.S. Texas, Paper presented at the **Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Columbus, OH, 1995.

VASCONCELOS, I, C. P.; MAMEDE, E. P. B. C.; DORNELES, B. V. The comprehension of numerical relationships in the learning of fractions: a comparative study with Brazilian and Portuguese children. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, [s.l.], v. 98, n. 249, p.251-269, 2017.

ZAKARYAN, D.; RIBEIRO, M. Mathematics teachers' specialized knowledge: a secondary teacher's knowledge of rational numbers. **Research in Mathematics Education,** v. 21, n. 1, p. 25-42, 2018.