ACERVO
BOLETIM DO CENTRO DE DOCUMENTAÇÃO DO GHEMAT-SP

FRAÇÕES EGÍPCIAS E O ALGORITMO DE FIBONACCI: HISTÓRIA DA MATEMÁTICA *VERSUS* LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS

EGYPTIAN FRACTIONS AND FIBONACCI ALGORITHM: HISTORY OF MATHEMATICS *VERSUS* CONTEMPORARY TEXTBOOKS

FRACCIONES EGIPCIAS Y ALGORITMO DE FIBONACCI: LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS FRENTE A LOS LIBROS DE TEXTO CONTEMPORÁNEOS

FRACTIONS ÉGYPTIENNES ET ALGORITHME DE FIBONACCI: HISTOIRE DES MATHEMATIQUES *VERSUS* MANUELS CONTEMPORAINS

Marc Moyon[1]
ORCID iD: https://orcid.org/ 0000-0002-5773-5513

Submetido: 22 de março de 2023 **Aprovado:** 07 de abril de 2023

RESUMO

Neste artigo, aprofundamos o estudo realizado em Moyon (2022) sobre a relação entre os livros didáticos franceses e a história da matemática, tendo por foco nossas reflexões sobre a noção de fração na Antiguidade e na Idade Média, entre os egípcios e o algorítmo desenvolvido por Fibonacci (séc. XIII) em seu Liber Abbaci (a partir de uma tradução inédita do texto em latim para o francês). Desse modo, dedicamos uma parte importante da investigação ao estudo dos livros didáticos franceses da atualidade, intentando estudar as possibilidades e os aportes de uma perspectiva histórica no ensino a partir desses livros (do colégio e do liceu, 11-18 anos). Confrontamos, inicialmente, as informações consideradas históricas, no âmbito de nossas fontes originais, isto é, relativamente à história da matemática que conhecemos hoje. Por fim, alerto os professores quanto à utilização de livros didáticos quando eles desejam introduzir uma perspectiva histórica em suas aulas, tendo em conta elementos didáticos e os principais estudos vindos do HPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics) do ICMI.

Palavras-chave: História da Matemática; livro didático; frações; Fibonacci; Egito.

ABSTRACT

In this article, I deepen the study carried out in Moyon (2022) about the relations between French mathematical textbooks and the history of mathematics, focusing on the notion of fractions in Antiquity and the Middle Ages, among the Egyptians and for the algorithm that Fibonacci (13th c.) developed in his *Liber Abbaci* (with an unpublished French translation of the Latin text). I therefore devote an important part of my research to the study of contemporary French textbooks, studying the nature and contribution of a historical perspective in maths education based on textbooks (middle and high school, 11-18 years old). First of all, I confront the so-called historical informations contained in my corpus with the original sources, i.e. with the history of mathematics as we know it today. Finally, I warn teachers about the use of textbooks when they want to implement a historical perspective in their classrooms taking into account didactical purposes and the main works of the HPM group (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics) of ICMI.

Keywords: History of mathematics; Textbooks; Fractions; Fibonaci; Egypt.

[1] Docteur en histoire des mathématiques de l'université de Lille. Maître de conférences habilité à diriger des recherches à l'université de Limoges. Directeur de l'Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation de l'académie de Limoges. Université de Limoges, CNRS, XLIM, UMR 7252, F-87000 Limoges, France. E-mail: marc.moyon@unilim.fr.

RESUMEN

En este artículo, profundizo el estudio realizado en Moyon (2022) sobre la relación entre los libros de texto franceses y la historia de las matemáticas, enfocando mi réflexion en la noción de fracción en la Antigüedad y la Edad Media, entre los Egipcios y para el algoritmo desarrollado por Fibonacci (s. XIII) en su *Liber Abbaci* (con una traducción inédita del texto latino en francés). Así pues, dedico una parte importante de mi investigación al estudio de los libros de texto franceses contemporáneos, intentando estudiar la indole y la aportación de una perspectiva histórica en la enseñanza basada en los libros de texto (enseñanza media y secundaria, 11-18 años). En primer lugar, confronto las informaciones "históricas" que aparecen en mi corpus con las fuentes originales, es decir, con la historia de las matemáticas tal y como las conocemos hoy en día. Por último, advierto a los profesores sobre el uso de los libros de texto cuando quieren introducir una perspectiva histórica en sus aulas teniendo en cuenta elementos didácticos y los principales trabajos del grupo HPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics) del ICMI.

Palavras-chave: Historia de las matemáticas; Libros de texto; Fracciones; Fibonaci; Egipto.

RÉSUMÉ

Dans cet article, j'approfondis l'étude menée dans Moyon (2022) à propos des relations entre les manuels scolaires français et l'histoire des mathématiques, centrant mon propos sur la notion de fractions dans l'Antiquité et au Moyen Âge, chez les Égyptiens et pour l'algorithme que Fibonacci (XIII[e] s.) développe dans son *Liber Abbaci* (avec une traduction française inédite du texte latin). Je consacre donc une part importante à l'étude des manuels français contemporains, tentant d'étudier les natures et apports d'une perspective historique dans l'enseignement à partir des manuels (du collège et du lycée, 11-18 ans). Je confronte d'abord les informations dites historiques contenues dans mon corpus aux sources originales, i.e. à l'histoire des mathématiques telles que nous la connaissons aujourd'hui. Enfin, je mets en garde les enseignants envers l'utilisation des manuels scolaires lorsqu'ils souhaitent introduire une perspective historique dans leur classe tenant compte d'éléments didactiques et des principaux travaux du groupe HPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics) d'ICMI.

Keywords: Histoire des mathématiques; Manuels scolaires; Fractions; Fibonaci; Égypte

INTRODUCTION

Les problématiques à propos de l'histoire des mathématiques nourrissent de nombreuses recherches sur la plan international dans le champ de l'éducation mathématique. Anciennes et riches, elles sont à l'origine de copieuses publications. Ces problématiques sont régulièrement traitées dans les IREM (pour la France), et au sein du groupe international HPM (relations entre Histoire et Pédagogie des Mathématiques), affilié à la commission internationale sur l'instruction mathématique (ICMI). Plusieurs synthèses existent comme le bilan de Fauvel & van Maanen (2000) pour les travaux antérieurs aux années 2000, et plus récemment ceux de Clark et al. (2016, 2018a, 2018b, 2019). D'autres travaux d'actualité sont régulièrement édités à l'instar de ceux de Chorlay et al. (2022), pour les plus récents.

Dans Moyon (2022), j'ai analysé, à partir d'un questionnaire anonyme complété par 646 enseignants français de mathématiques, leur comportement vis-à-vis de l'introduction d'une perspective historique dans leur enseignement. J'ai tenté de lever le voile sur la manière avec laquelle ces enseignants reçoivent les recommandations officielles du Ministère de l'éducation nationale (MEN, 2019a ; 2019b) qui les invitent explicitement à intégrer l'histoire des mathématiques dans leur enseignement et/ou leur réflexion. Là, j'ai montré la nette différence entre le désir des enseignants (l'histoire des mathématiques « en puissance ») et la réalité en classe (l’histoire des mathématiques « en acte », pour reprendre les termes d’Aristote dans la *Physique*). J’ai aussi proposé d'étudier, à l'aide d’une grille d'analyse adaptée de Schorcht (2018a, 2018b), les tâches didactiques proposées par les manuels scolaires français autour des références aux mathématiques médiévales du *Liber Abbaci* de Fibonacci (en général). En effet, les manuels sont, dans la pratique, un des premiers supports des enseignants concernant l’histoire des mathématiques et leur didactique, particulièrement grâce aux informations « historiques » qu'ils contiennent dans les introductions, illustrations, vignettes, biographies, anecdotes, activités, exercices ou problèmes. Dans le présent travail, je souhaite étudier de manière systématique les occurrences explicites aux quantièmes égyptiens[2] dans les manuels scolaires (incluant le collège). Cet article consacre donc une part importante à l'étude des manuels scolaires contemporains dont les tâches prennent en compte l’histoire des mathématiques.

Dans les deux premières parties, à partir de la récente historiographie et des sources primaires, je présente ce que sont les quantièmes égyptiens (Antiquité) et le travail de Fibonacci (XIII^e siècle) sur la décomposition d’une fraction en somme de fractions de numérateur 1. Je présente ensuite, dans une troisième partie, mon corpus composé d’extraits de manuels scolaires en relation avec les thèmes précités. D’abord, la notion antique de quantièmes égyptiens est bien représentée dans les manuels scolaires français[3], voire dans les concours de recrutement des professeurs des écoles (3-11 ans) (voir annexe 2), et dans les connaissances des enseignants (GAZI, 2012). Ensuite, cet exemple est intéressant car il a aussi été étudié par Guy Brousseau (1989 ; 1998) – dans le champ de la didactique des mathématiques – pour savoir s’il pouvait, en tant que « connaissance fossile » et « malgré son manque d’intérêt didactique » être considéré comme un « obstacle épistémologique ». Ma problématique ne se situe pas au même niveau que celle de Brousseau : j’étudie l’exemple des quantièmes et son « prolongement » dans le *Liber Abbaci* dans le domaine précis de l’épistémologie historique des mathématiques. Il ne s’agit donc pas pour moi de proposer une nouvelle ingénierie pédagogique pour l’enseignement des fractions, à partir des quantièmes égyptiens ou des travaux de Fibonacci (ce qui serait hors de mes compétences). J’analyse leur présence dans les manuels scolaires français de l'enseignement secondaire (11-18 ans), ce qui me permet de mettre en évidence certains

[2] Je reviens nécessairement sur cette notion de « quantième » égyptien dans la première partie de cet article, m’appuyant principalement sur l’historiographie.

[3] Dans Fauvel & van Maanen (2000), Lakoma (p. 22) montre que les « fractions égyptiennes » occupent aussi une place importante dans l’édition scolaire polonaise. Voir l’étude de Schorcht (2018a, p. 255-273) pour le cas allemand. Abraham Arcavi les a encore évoquées lors de sa conférence plénière « Roles of the history of mathematics in the mathematical knowledge for Teaching » à Salerne (juillet 2022) pour ESU-9 (9th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education) dont les actes sont à paraître.

invariants dans leur présentation : quelle histoire ? quel rapport aux concepts mathématiques en jeu ? Quelles tâches didactiques ? Voici les questions auxquelles je tacherai de répondre après avoir pris en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique comme nous y invite Dorier (2020). J'interroge ainsi la pertinence de mon corpus par rapport aux sources historiques. Cela me permet ensuite d'énoncer quelques critiques ou mises en garde, concernant les éléments présentés aux élèves dans les manuels scolaires : l'histoire, et donc la réflexion épistémologique, est souvent bien différente de celle présentée dans les manuels scolaires par les auteurs/éditeurs (qui respectent leurs propres contraintes), malgré les besoins largement revendiqués de lier didactique et épistémologie (ARTIGUE, 1989 ; DORIER 2020 ; BÄCHTOLD et al., 2020), sur lesquels je reviendrai en conclusion.

1. PREMIÈRE EXPLORATION EN HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : PEUT-ON PARLER DE « FRACTIONS EGYPTIENNES » ?

Dans cette partie, je souhaite donner à voir les premières réflexions autour du quantième égyptien (noté $\overline{n}$ pour notre écriture actuelle $\frac{1}{n}$, avec n entier), à l'instar de Caveing (1992) ou Guillemot (1992).

> Les textes mathématiques de l'ancienne Égypte présentent un certain graphisme dans lequel la notation standard d'un entier naturel est surmonté de l'hiéroglyphe « rô ». L'habitude a été prise, parmi les historiens des sciences d'y voir la notation du « quantième », expression que nous noterions $\frac{1}{n}$ […]. De façon vulgarisée, on répète que les Égyptiens utilisaient des fractions de numérateur 1. (CAVEING, 1992, p. 39)

Dans le même ouvrage, Guillemot (1992) va jusqu'à poser explicitement la question : « Les notations et les pratiques opératoires permettent-elles de parler de 'fractions égyptiennes' ? » et conclut : « après avoir examiné divers domaines où les anciens Égyptiens auraient pu exprimer un concept de 'fraction générale', nous pouvons affirmer que celui-ci leur était inconnu » (GUILLEMOT 1992, p. 67).

Dans le développement qui suit où il s'agit de lire les textes égyptiens comme un contemporain des scribes-auteurs et non comme un héritier[4], je m'appuie principalement sur les travaux de Imhausen (2006 ; 2007 ; 2016), Michel (2014) et Ritter (1992 ; 2000 ; 2002 ; 2008). Je reviendrai le plus possibles aux sources disponibles et à leur interprétation par les spécialistes. Ainsi, plusieurs niveaux de compréhension sont importants. D'abord, à la lecture de l'historiographie récente, il est fondamental de comprendre si les scribes égyptiens manipulaient ou non ce que nous appelons des « fractions » ou si la conclusion de Guillemot (1992) reste confirmée. Enfin, je reviendrai sur le fameux œil du Dieu faucon Horus très présent dans la littérature didactique pour démythifier, en suivant Ritter (2002), la relation entre le Dieu égyptien et lesdites « fractions ».

[4] Sur cette importante distinction, lire les réflexions de Barbin (2002).

1.1. Les quantièmes égyptiens

> Un aspect des mathématiques égyptiennes qui a fasciné les historiens des mathématiques est la méthode égyptienne de calcul des fractions. Exprimées dans la terminologie mathématique moderne, les mathématiques égyptiennes anciennes n'utilisaient que des fractions unitaires, la seule exception étant la fraction $\frac{2}{3}$ [...].
> La description moderne du calcul des fractions égyptiennes comme étant «limité» aux fractions unitaires est évidemment anachronique (en effet, le concept égyptien des fractions n'incluait pas de numérateur, mais du point de vue de l'historien, cela ne peut être critiqué sur la base du fait que nos fractions modernes sont composées d'un dénominateur et d'un numérateur). En outre, cette critique ne rend pas justice au développement des fractions égyptiennes. Enfin, la représentation des fractions égyptiennes dans notre système moderne en utilisant toujours le numérateur 1 rend le calcul des fractions égyptiennes plus lourd que nécessaire pour un lecteur moderne, ce qui a conduit à des évaluations négatives des chercheurs modernes […] (IMHAUSEN, 2016, p. 4-5, traduit de l'anglais par l'auteur)

Ces propos sont clairs : si nous considérons des « fractions égyptiennes », c'est pas abus de langage ou par commodité d'écriture par rapport au symbolisme d'aujourd'hui. Imhausen insiste ici comme ailleurs (2006, p. 21) sur la vision anachronique que les lecteurs modernes développent à l'égard des mathématiques égyptiennes. Avec Ritter (2008), le lecteur comprend qu'un même quantième ne peut pas être écrit au sein d'une même expression : il met alors en avant l'importance des *tables*, artefact indispensable pour mener des calculs sans faire appel systématiquement à la mémorisation de résultats connus. En outre, en fin de citation, il nous met aussi en garde contre l'anachronisme si fâcheux en histoire ; il faut observer et étudier les mathématiques égyptiennes dans leur propre contexte et non dans un contexte que l'historien lui dessinerait *a posteriori* avec ses propres connaissances et autres représentations :

> Une seule fraction d'un type donné pouvait être utilisée dans l'écriture d'un nombre donné. Ainsi, par exemple, le double du nombre $1 + \frac{1}{5}$ ne s'écrivait pas $2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ mais plutôt $2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. La recherche de telles expressions est un problème central difficile : il se pose chaque fois qu'il faut doubler une fraction « impaire », calculer les deux tiers d'une fraction ou additionner des fractions. Il constitue le cœur des mathématiques égyptiennes et fournit le contenu des *tables* mathématiques égyptiennes. Ces calculs difficiles pouvaient être effectués une fois pour toutes et les résultats simplement copiés et consultés lorsque le besoin s'en faisait sentir pour la résolution d'un problème spécifique. […]
> Si les mathématiques égyptiennes sont considérées non pas comme un pauvre simulacre des mathématiques orientées vers la preuve, mais sur leur propre terrain, elles seront perçues comme une réponse adéquate et rationnelle aux besoins socio-économiques et éducatifs de la société égyptienne. Les mathématiques ont même fourni un modèle de pratique rationnelle, également applicable à d'autres domaines, partout où un mode d'action efficace sur le monde était nécessaire. (RITTER, 2008, p. 1380, traduit de l'anglais par l'auteur)

Ritter montre par ailleurs, à propos des Mésopotamiens et des Égyptiens, que « la restriction des premières constructions fractionnaires à des systèmes métrologiques particuliers

– volume pour les Sumériens, longueur pour les Égyptiens – est représentative d'un phénomène important ; la dépendance, dans les premières écritures numériques, du nombre par rapport au système métrologique. » (RITTER, 1992, p. 30, traduction de l'anglais par l'auteur). La relation entre les grandeurs et la représentation d'un nombre est historiquement posée, et depuis au moins l'Antiquité.

Un problème courant dans les mathématiques égyptienne[5] est la décomposition en quantièmes des « fractions » du type $\frac{2}{n}$ où n est impair (IMHAUSEN, 2006, p. 21-22 ; 2016, p. 93-96) ; le cas où n est pair est trivial puisque 2 divise n. Des tables de référence sont construites par les scribes privilégiant des sommes comportant le plus petit nombre de termes et les termes les plus grands (MICHEL, 2014, p. 92 ; IMHAUSEN, 2016, p. 95) et plusieurs types de décompositions en fonction de la nature du quantième sont rationnellement reconstruits par les spécialistes[6]. Ces décompositions particulières sont extrêmement utiles car elles peuvent souvent être mise en pratique pour décomposer d'autres fractions. Michel (2014, p. 107) donne l'exemple suivant :

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{7} + \left(2 \times \frac{2}{7}\right) = \frac{1}{7} + \left(2 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right)\right) = \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{14}\right)$$

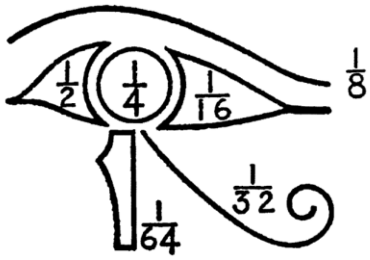
1.2. L'œil d'Horus

Comme nous l'observerons dans la troisième partie (fig. 2 ; 7 ; 8-12 ; 14 et annexe 3), les quantièmes égyptiens sont généralement associés au fameux mythe de l'œil du Dieu faucon Horus avec une iconographie *ad-hoc*. D'après la mythologie égyptienne, Horus – fils d'Isis et Osiris – perd son œil lors du combat l'opposant à son oncle Seth qui le dépeça en six fragments. Thot (ou Theuth) le restaura après le combat (fig. 1).

Depuis les travaux du grammairien Gardiner (1927), à chacune des six parties de l'œil d'Horus est associée un quantième : $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$, qui représenterait des sous-unités de la *heqat*, unité de mesure égyptienne pour le volume de grains. Pour Ritter (2003, p. 297), « les 'fractions de l'œil d'Horus' n'étaient, à l'origine du moins, en aucune manière ni des fractions, ni associées à l'œil d'Horus ». Pour Ritter (2003, p. 298, trad. de l'anglais par l'auteur) toujours, l'œil d'Horus est un exemple paradigmatique du fait qu'une conjecture, initialement avancée de manière provisoire, perd son caractère provisoire au fil du temps. C'est intéressant pour notre propos puisque c'est exactement ce qu'on va voir à l'œuvre dans la littérature didactique.

[5] On le retrouve au moins dans le papyrus Rhind, le papyrus d'Akhmîm, dans les fragments mathématiques d'El-Lahun ou Kahun ou encore dans le papyrus démotique BM 10520 (MICHEL, 2014, p. 91-112).
[6] C'est le sujet mathématique (mais ahistorique) de la partie B de l'Annexe 2.

Figura 1 –La décomposition de l'œil d'Horus selon Alan Henderson Gardiner



Fonte: Gardiner (1927, p. 197)

Au tournant du XXI[e] siècle, profitant de ses connaissances des sciences égyptiennes (pas seulement mathématiques), de nouvelles sources et perspectives, Ritter (1992 ; 2003) interroge l'historiographie et reconstruit la manière avec laquelle la conjecture de Gardiner (inspirée des travaux séminaux de Möller avec des modifications que Ritter note en détail) est progressivement acceptée comme « l'interprétation standard pour les égyptologues et les historiens des sciences » pour les décennies post-1930. Cependant, Ritter (1992 ; 2003) infirme définitivement la thèse : aucune fraction ne doit être associée à l'œil d'Horus, ni même les sous-unités de mesure de grains de la *heqat*. Le mythe de l'œil d'Horus n'a aucun rapport avec les quantièmes.

2. SECONDE EXPLORATION EN HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : L'ALGORITHME GLOUTON DE FIBONACCI À AUJOURD'HUI

Y a-t-il un lien entre les scribes égyptiens du Moyen Empire et le *Liber Abbaci* de Fibonacci ? Pour répondre à ce genre de questions, l'historien a besoin de preuves (directes ou indirectes)[7]. J'y vois plutôt à l'œuvre ce que décrit Évelyne Barbin en s'inspirant des travaux de l'historien Paul Veyne.

> […] les textes mathématiques se suivant dans le temps selon un ordre de conséquence, une vision continuiste de l'histoire des mathématiques s'est imposée et continue de s'imposer. (BARBIN, 2002, p. 146)

En effet, jamais Fibonacci ne cite les Égyptiens, jamais Fibonacci ne se réclame des Égyptiens de l'Antiquité[8] mais les mathématiciens (et les historiens) ont fait le lien avec une vision large, générale et chronologique en traçant une « continuité » entre les scribes égyptiens et le mathématicien pisan, largement reprise dans les ouvrages scolaires et autres discours

---

[7] Il est peu probable que Fibonacci puisse lire les textes égyptiens du Moyen Empire (les hiéroglyphes n'ont été déchiffrés qu'au tournant des XVIII[e]/XIX[e] siècle). Reste à savoir si la manipulation des quantièmes était toujours effective dans la tradition locale égyptienne médiévale, ce qui aurait pu alors inspirer Fibonacci.

[8] Fibonacci mentionne l'Égypte médiévale dans son prologue à propos de l'apprentissage de la numération décimale positionnelle et du calcul concernant « les différentes méthodes en Égypte, Syrie, Grèce et Provence » (Giusti, 2020, p.4).

pseudo-historiques (offrant souvent des raccourcis implicites). Le lecteur moderne est devant une histoire des mathématiques faussement continue, alors qu'il serait sans aucun doute plus nécessaire de placer le lecteur (et notamment l'élève) devant la réalité de l'histoire des mathématiques : « un discontinu, avec des tensions ou des ruptures » (BARBIN, 2002, p. 148).

Dans son *Liber Abbaci*, Fibonacci définit différents genres de fractions ou nombres rompus, montrant sa connaissance des mathématiques des pays d'Islam et particulièrement du Maghreb (MOYON et al., 2015). Les fractions occupent un place centrale dans l'œuvre de Fibonacci après qu'elles sont introduites au chapitre 5, soit en tant que telles, soit en tant qu'outils de calcul (notamment dans les nombreux problèmes qu'il résout). Plusieurs termes désignent les fractions : d'abord, « minute » puis « nombres rompus » ou simplement « rompus » ou bien encore « fraction ». Une fraction est le partage d'un entier en parts : $\frac{a}{b}$ signifie qu'on a pris a parts sur les b parts en lesquelles est divisé un entier ($a<b$).

Dans l'annexe 1, je traduis le passage du *Liber Abbaci* où Fibonacci propose une méthode pour transformer tout nombre rationnel (inférieur à 1) en somme de quantièmes ou fractions unitaires (*singulas partes* dans le texte de Fibonacci), au sens même où nous l'avons défini pour les mathématiques égyptiennes (à la différence près que Fibonacci, lui, a bien construit la notion de fractions, en général). L'algorithme de Fibonacci est construit autour de sept cas distincts et aboutit à une procédure générale pour les fractions qui n'auraient pas été traitées avec les cas précédents. Je résume dans le tableau 1 les sept cas et certains exemples résolus. Je renvoie à l'annexe 1 pour la traduction du texte (qui mentionne quelques autres exemples) : il s'agit d'une véritable disjonction de cas. Le 3^e^ cas (grisé dans le tableau 1) est central car les 4^e^, 5^e^ et 6^e^ cas sont construits pour l'utiliser avec la fraction reste obtenue.

Tabela 1 – Les sept cas de l'algorithme de Fibonacci pour décomposer tout nombre rationnel en somme de quantièmes

Cas	Type de fractions	Procédure générale	Premiers exemples résolus
1	$\frac{p}{q}$ avec $p\|q$	$\frac{1}{k}$ avec $q = k.p$	$\frac{3}{12}$; $\frac{4}{20}$; $\frac{5}{100}$
2	$\frac{p}{q}$ avec $p \nmid q$ mais $\exists m \in \mathbb{N}, \exists a_i \in \mathbb{N}\ (1 < i \leq m)$ tel que $p = \sum_1^m a_i$ avec $a_i\|q$	$\sum_1^m \frac{1}{q_i}$ avec $q = q_i \times a_i$	$\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$
3	$\frac{p}{q}$ avec $p\|(q+1)$	$\frac{1}{k} + \frac{1}{kq}$ avec $p.k = q+1$	$\frac{2}{11}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{5}{19}$; $\frac{14}{27}$
3bis	Sommes de fractions précédentes		$\frac{8}{11}$; $\frac{9}{11}$; $\frac{10}{11}$
4	$\frac{p}{q}$ avec q premier et $(p-1)\|(q+1)$	$\frac{p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{p-1}{q}$ (on utilise le cas 3 avec la fraction $\frac{p-1}{q}$)	$\frac{5}{11}$; $\frac{7}{11}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{6}{19}$; $\frac{7}{29}$
5	$\frac{p}{q}$ avec q pair et $(p-2)\|(q+1)$	$\frac{p}{q} = \frac{2}{q} + \frac{p-2}{q}$ (on utilise le cas 3 avec la fraction $\frac{p-2}{q}$ et le cas 1 pour $\frac{2}{q}$)	$\frac{11}{26}$; $\frac{11}{62}$
6	$\frac{p}{q}$ avec $3\|q$ et $(p-3)\|(q+1)$	$\frac{p}{q} = \frac{3}{q} + \frac{p-3}{q}$ (on utilise le cas 3 avec la fraction $\frac{p-2}{q}$ et le cas 1 pour $\frac{3}{q}$)	$\frac{17}{27}$; $\frac{20}{33}$
7	L'« algorithme glouton » pour toute fraction non concernée par les cas précédents		$\frac{4}{13}$; $\frac{3}{52}$; $\frac{9}{61}$; $\frac{17}{29}$

Fonte: elaborada pelo autor.

C'est ce passage du *Liber Abbaci* qui a incité certains auteurs à placer Fibonacci dans la continuité des soi-disant « fractions égyptiennes » comme ici :

> Fibonacci avait donné un algorithme pour décomposer en fraction égyptienne une catégorie de fractions [en note : les fractions $\frac{k}{n}$ avec *k*<*n*].
>
> Mais celui-ci aboutit souvent à des décompositions longues, avec des dénominateurs grands. Ainsi, pour la fraction $\frac{4}{65}$, il donnera la fraction égyptienne $\frac{1}{17} + \frac{1}{369} + \frac{1}{203873} + \frac{1}{83128196385}$ alors que la formule $\frac{1}{26} + \frac{1}{65} + \frac{1}{130}$ convient aussi. Si on se met à la place d'un Égyptien de l'Antiquité, qui n'a que cet outil pour décrire une fraction, on aura tendance à choisir la deuxième version ! (LAGAIZE, 2022)

Or, si l'on décompose la fraction $\frac{4}{65}$ en suivant pas à pas la méthode proposée par Fibonacci (annexe 1), nous arrivons à une tout autre décomposition. En effet, $\frac{4}{65}$ s'écrit comme la somme $\frac{1}{65}+\frac{3}{65}$ (tableau 1, cas 3bis) où $\frac{1}{65}$ est d'ores et déjà un quantième. Il suffit maintenant de décomposer $\frac{3}{65}$ (tableau 1, cas 3). J'obtiens : $\frac{1}{22}+\frac{1}{1430}$. Ainsi, en utilisant la méthode de Fibonacci, on a : $\frac{4}{65}=\frac{1}{22}+\frac{1}{65}+\frac{1}{1430}$ et non celle proposée par Lagaize (2022). Quant aux Égyptiens de l'Antiquité, je ne m'aventurerais pas à décider quelle décomposition ils auraient choisi, en l'absence de textes[9]. Cet exemple montre que l'usage des sources historiques est inévitablement à reprendre et qu'il n'est pas nécessaire de citer l'histoire des mathématiques si on n'utilise pas les sources avec respect. Il est impossible de se soustraire de leur lecture sil' on souhaite comprendre l'évolution des mathématiques et la montrer. C'est la manière raisonnable et honnête pour percevoir les mathématiques passées et les rendre intelligibles.

À la fin du XIX^{e} siècle, Sylvester (1880) donne à son tour un algorithme glouton pour décomposer toute fraction en somme de quantièmes, puisant cette initiative – selon son témoignage –, dans l'histoire des mathématiques :

> La question […] m'a été suggérée par le chapitre du *Geschichte Der Mathematik* de Cantor qui rend compte de la méthode singulière utilisée par les anciens Égyptiens pour travailler avec les fractions. Ils avaient la curieuse habitude de résoudre chaque fraction en une somme de fractions simples selon une certaine méthode traditionnelle […]. (SYLVESTER, 1880, p. 334)

Aussi, comme Leo Corry (2015, p. 26, trad. de l'auteur) le précise, « les 'fractions égyptiennes' sont utilisées aujourd'hui dans la théorie moderne des nombres pour noter une somme de différentes fractions unitaires. Il y a beaucoup de problèmes intéressants et de conjectures ouvertes liés à la possible représentation de fractions ordinaires en fractions égyptiennes ». Je peux bien sûr citer l'exemple de la conjecture d'Erdös-Strauss de 1950 (LAGAIZE, 2022 ; MOYON, 2022, p. 1624-1626).

3. ÉTUDE DES MANUELS SCOLAIRES

Dans cette partie, j'étudie les manuels scolaires de l'enseignement secondaire français. Dans le système éducatif français, l'enseignement secondaire est réparti entre le collège (11-15 ans) et le lycée (15-18 ans), puis est divisé en classes et cycles (tableau 2). Les cycles apparaissent explicitement dans la réforme du Ministère de l'éducation nationale (MEN, 2015). Avant cette réforme, aucun manuel scolaire de cycle n'est édité ; seuls des manuels de niveaux

[9] $\frac{4}{65}=2\times\left(\frac{2}{65}\right)$. Et d'après la décomposition trouvée dans le papyrus Rhind, on aurait : $\frac{4}{65}=2\times\left(\frac{1}{39}+\frac{1}{195}\right)$. Si l'on connaît, toujours grâce au papyrus Rhind, la décomposition de $\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$, on ne connaît pas la décomposition que le scribe égyptien aurait réalisée pour $\frac{2}{195}$ (MICHEL, 2014, p. 98-99).

de classe existe.

Tabela 2 – Correspondance classes/cycles dans la voie générale du système éducatif français – enseignement secondaire (en fonction de l'âge des élèves)

Âge (années)	Niveau de classe	Cycle	
11-12	Sixième / 6^{e}	Cycle 3	Collège
12-13	Cinquième / 5^{e}	Cycle 4	
13-14	Quatrième / 4^{e}		
14-15	Troisième / 3^{e}		
15-16	Seconde / 2nde		Lycée
16-17	Première / 1ère	Cycle terminal	
17-18	Terminale / T^{ale}		
	baccalauréat		

Fonte: elaborada pelo autor

Dans l'enseignement des mathématiques, il existe des classiques lorsqu'un enseignant souhaite évoquer l'histoire des mathématiques : l'histoire des numérations, souvent dans une perspective comparatiste en fait indéniablement partie (THANHEISER et al. (2018)). En particulier, l'étude de la numération décimale additive hiéroglyphique, c'est-à-dire celle utilisée par les scribes égyptiens du Moyen Empire, est souvent proposée dans ce contexte, dès l'école primaire (à partir de 7 ans). Cette numération fascine autant les enseignants que les élèves, sans doute parce que « la numération égyptienne a pour avantage d'être jolie, d'être rigolote[10] », elle a aussi l'avantage d'être additive donc la position des symboles – ici les hiéroglyphes qui sont généralement des pictogrammes et rarement des idéogrammes – n'a pas d'importance. Les manuels scolaires français sont souvent à l'image de ces pratiques enseignantes. Le formateur d'enseignants assiste alors à un cercle vicieux : le manuel suggère la pratique enseignante par les activités/problèmes proposés pendant que l'enseignant cherche souvent dans le manuel ce qu'il souhaite et ce qu'il croit connaître.

Au total, j'ai consulté 63 manuels scolaires numériques (37 pour le collège et 26 pour le lycée) et j'ai construit mon corpus à partir d'une recherche systématique des termes « Égypte », « égyptien/égyptienne », « Fibonacci », « Sylvester » et « glouton ». J'ai ensuite isolé tous les extraits (voir fig. 2-14, fig. 16).

2.1. Au collège (11-15 ans)

Pour le collège, j'ai souhaité prendre en compte à la fois les manuels disponibles avant et après la réforme de 2015 (voir tableau 3). Cela me permet d'établir quelques éléments

[10] https://clairelommeblog.wordpress.com/2016/09/22/les-nombres-et-les-autres/ [consulté le 20 mars 2023]

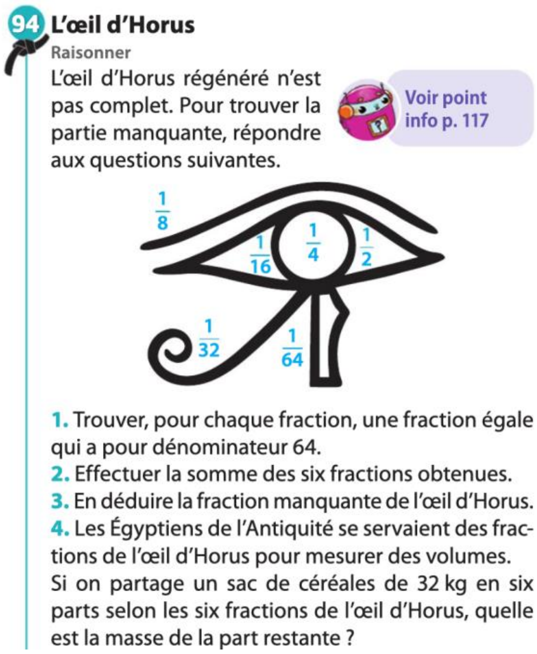
comparatifs. Au total 11 extraits sont étudiés : 6 avant la réforme, 5 après.

Tabela 3 – Contexte éditorial et construction du corpus pour le collège (11-15 ans) avec une réforme du Ministère de l'éducation nationale (2015)

Classe	Période 2009-2015				Période 2016-2022			
	manuels consultés (en unité)	**manuels retenus (en unité, %)**		**Extraits considérés**	**manuels consultés (en unité)**	**manuels retenus (en unité, %)**		**Extraits considérés**
6e	4	1	25	Fig. 3	8	2	25	Fig. 2, 4
5e	3	3	100	Fig. 5, 6, 8	4	2	50	Fig. 7
4e	4	2	50	Fig. 9, 10	3	0	0	
3e	3	0	0		4	0	0	
Cycle 4					4	1	25	Fig. 11
Total	14	6			23	5		

Fonte: elaborada pelo autor

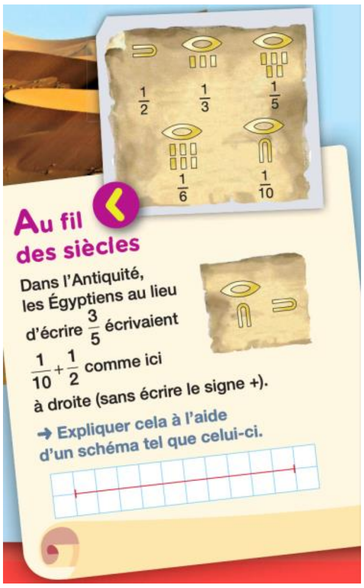
Figura 2 – Exemple de manuels scolaires (sixième) : l'œil d'Horus


94 L'œil d'Horus
Raisonner
L'œil d'Horus régénéré n'est pas complet. Pour trouver la partie manquante, répondre aux questions suivantes.
Voir point info p. 117

1. Trouver, pour chaque fraction, une fraction égale qui a pour dénominateur 64.
2. Effectuer la somme des six fractions obtenues.
3. En déduire la fraction manquante de l'œil d'Horus.
4. Les Égyptiens de l'Antiquité se servaient des fractions de l'œil d'Horus pour mesurer des volumes.
Si on partage un sac de céréales de 32 kg en six parts selon les six fractions de l'œil d'Horus, quelle est la masse de la part restante ?

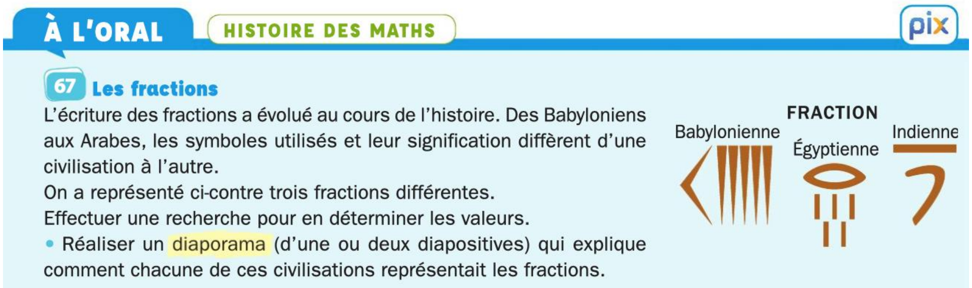
Fonte: Barnet (2021, p. 133) – Voir annexe 3 pour le développement du "point info"

Figura 3 – Exemple de manuels scolaires (sixième) : les fractions comme somme de quantièmes



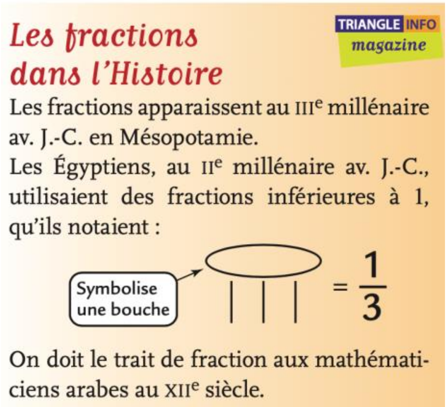
Fonte: Malaval (2013, p. 87)

Figura 4 – Exemple de manuels scolaires (sixième) : écriture symbolique des fractions



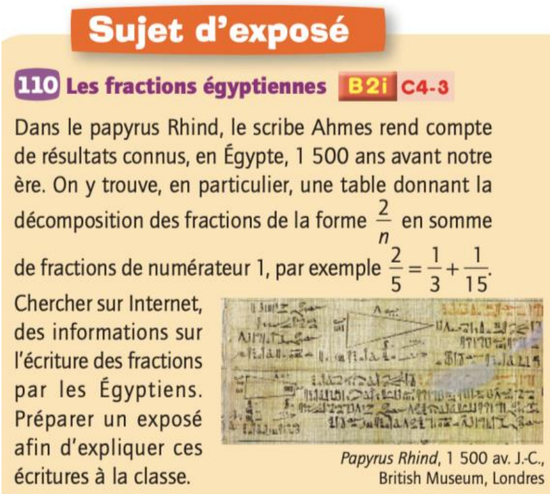
Fonte: Joly (2022, p. 106)

Figura 5 – Exemple de manuels scolaires (cinquième) : écriture symbolique des fractions



Fonte: Chapiron & al. (2010, p. 34)

Figura 6 – Exemple de manuels scolaires (cinquième) : les fractions comme somme de quantièmes, fractions doubles



Sujet d'exposé

110 Les fractions égyptiennes B2i C4-3

Dans le papyrus Rhind, le scribe Ahmes rend compte de résultats connus, en Égypte, 1 500 ans avant notre ère. On y trouve, en particulier, une table donnant la décomposition des fractions de la forme $\frac{2}{n}$ en somme de fractions de numérateur 1, par exemple $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Chercher sur Internet, des informations sur l'écriture des fractions par les Égyptiens. Préparer un exposé afin d'expliquer ces écritures à la classe.

Papyrus Rhind, 1 500 av. J.-C., British Museum, Londres

Fonte: Malaval & Courbon (2010, p. 69)

Figura 7 – Exemple de manuels scolaires (cinquième) : l'œil d'Horus

136 **L'œil d'Horus** pix 1.1

Au temps des Pharaons, les Égyptiens utilisaient l'œil d'Horus pour représenter certaines fractions.

1. Chercher sur Internet la valeur de chacun des morceaux de cet œil.
2. Combien vaut la fraction représentée par cette image ?

85 **Étudier une représentation**

Représenter • Raisonner • Communiquer

Dans l'Égypte ancienne, l'œil d'Horus offrait protection, santé et rajeunissement.
Il est divisé en six parties : le côté droit de l'œil représente $\frac{1}{2}$, la pupille $\frac{1}{4}$, les sourcils $\frac{1}{8}$, le côté gauche de l'œil $\frac{1}{16}$, la queue incurvée $\frac{1}{32}$ et une larme $\frac{1}{64}$.
Quel nombre représente la totalité de l'œil d'Horus ?

Fonte: (à gauche) Boullis (2021, p. 79) ; (à droite) Malaval (2022, p. 85)

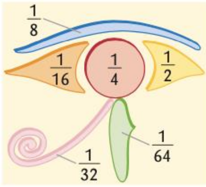
Figura 8 – Exemple de manuels scolaires (cinquième) : l'œil d'Horus

L'œil d'Horus

Dans la légende égyptienne, Osiris est le premier souverain d'Égypte. Il initie les Égyptiens à l'écriture, à la science et à la magie. Son frère Seth, jaloux, tue Osiris puis s'en prend à son fils Horus. Au cours d'un combat, Seth arrache l'œil gauche d'Horus, le coupe en morceaux et le jette dans le Nil. À l'aide d'un filet, Thot, le dieu du Savoir, récupère six morceaux. Les scribes utilisaient chaque partie de l'œil d'Horus pour représenter une fraction de numérateur 1 (voir schéma ci-dessous).

Œil d'Horus, date inconnue, collection particulière.

98 **1)** Calculer la somme de ces six fractions.
2) Quelle fraction manque-t-il pour obtenir 1 ?
Selon la légende, Thot accorda cette part manquante à tout scribe acceptant sa protection.



Scribe de Karnak, 490 ans avant J.-C., Musée du Louvre.

Les Égyptiens utilisaient souvent des fractions de numérateur 1 pour le commerce.
Ils utilisaient notamment les symboles de l'œil d'Horus.

99 Écrire chacune des fractions suivantes comme la somme de fractions de l'œil d'Horus.

a) $\frac{5}{16}$; **b)** $\frac{7}{8}$; **c)** $\frac{27}{32}$.

Fonte: Brault & al. (2010, p. 76)

Figura 9 – Exemple de manuels scolaires (quatrième) : l'œil d'Horus

Œil d'Horus (fractions égyptiennes)

TRIANGLE INFO magazine

Horus, le dieu faucon, fils d'Isis et d'Osiris, est un dieu vénéré en Égypte. C'est le dieu de l'azur, des espaces célestes. Le soleil et la lune sont ses yeux.
Les Égyptiens avaient attribué des valeurs à chaque partie de l'œil d'Horus.
La cornée valait $\frac{1}{2}$, l'iris $\frac{1}{4}$, le sourcil $\frac{1}{8}$, la partie gauche de la cornée $\frac{1}{16}$, la partie oblique $\frac{1}{32}$ et la partie verticale $\frac{1}{64}$.

Fonte: Chapiron & al. (2011, p. 48)

Figura 10 – Exemple de manuels scolaires (quatrième) : l'œil d'Horus

80 Histoire : décomposition d'un nombre en fractions égyptiennes

Les anciens Égyptiens avaient des techniques de multiplication (et de division) basées sur des additions successives. Ces techniques étaient directement liées à la maîtrise des écritures fractionnaires de numérateur 1, appelées quantièmes ou fractions unitaires.

Cette utilisation des quantièmes est sacralisée dans le mythe de l'œil d'Horus, le dieu faucon.

L'œil d'Horus, appelé *oudjat*, était souvent représenté sur les monuments funéraires.

L'œil d'Horus est ici entouré de Nekhbet (la déesse vautour) et d'Ouadjet (la déesse cobra).

L'oudjat est traditionnellement décomposé en 6 parties correspondant chacune à une fraction.

1. De quel nombre, $\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{22}$ est-elle une décomposition en quantièmes ?

2. Donner deux décompositions en quantièmes de $\frac{3}{4}$.

Une décomposition en quantièmes n'est pas unique. Les Égyptiens avaient un certain nombre de règles pour privilégier une solution plutôt qu'une autre : des quantièmes distincts, le moins de quantièmes possibles, des dénominateurs plus petits que 1 000, etc.

3. Décomposer en quantièmes distincts : $\frac{7}{12}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{15}$.

4. a. Décomposer en quantièmes distincts $\frac{2}{5}$ en passant par une écriture fractionnaire équivalente.

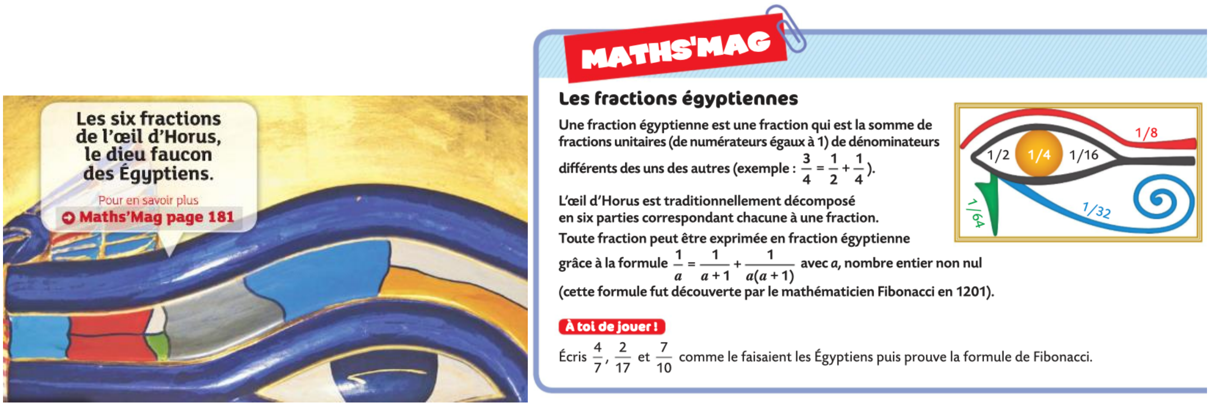
b. Décomposer d'une manière analogue en quantièmes distincts $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{11}$.

5. Mais, au fait quelle est la somme de toutes les fractions de l'*oudjat* ? Étrange, non ?

6. Pour en savoir plus, chercher quel est le mythe d'Horus.

Fonte: Chesné J.-F. & Le Yaouanq M.-H. (2011, p. 59)

Figura 11 – Exemple de manuels scolaires (cycle 4) : L'œil d'Horus



Les fractions égyptiennes

Une fraction égyptienne est une fraction qui est la somme de fractions unitaires (de numérateurs égaux à 1) de dénominateurs différents des uns des autres (exemple : $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$).

L'œil d'Horus est traditionnellement décomposé en six parties correspondant chacune à une fraction.

Toute fraction peut être exprimée en fraction égyptienne grâce à la formule $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}$ avec a, nombre entier non nul (cette formule fut découverte par le mathématicien Fibonacci en 1201).

À toi de jouer !

Écris $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{17}$ et $\frac{7}{10}$ comme le faisaient les Égyptiens puis prouve la formule de Fibonacci.

Fonte: Lanata (2016, p. 170 ; p. 181)

2.2. Au lycée (15-18 ans)

La réforme française de 2019 (réforme du lycée et du baccalauréat) a imposé, entre autres, un nouveau programme curriculaire pour toutes les classes du lycée (15-18 ans). Ci-dessous, j’ai sélectionné des extraits de programmes (MEN, 2019a, 2019b) montrant l’incitation explicite de l’institution à intégrer une perspective historique dans l’enseignement. Dans le paragraphe « Quelques lignes directrices pour l'enseignement », l’enseignant peut lire : « Les problèmes proposés aux élèves peuvent être internes aux mathématiques, provenir de l'histoire des mathématiques [...] »

Dans la partie « Organisation du programme » :

> Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur peut s'appuyer sur l'étude de documents historiques.

Comme nous le verrons dans l'analyse des manuels scolaires, cette réforme n'a pas été nécessairement et systématiquement suivie par les auteurs et éditeurs de manuels. On se posera néanmoins la question de savoir s'ils ont réévalué l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques.

Pour le lycée, je n’ai donc pris en compte que les manuels édités après la dernière réforme (2019). J’ai déjà considéré par ailleurs (MOYON, 2022) une comparaison entre les manuels du lycée pré-réforme et post-réforme. Voici, à partir du tableau 4, la présentation synthétique de mon corpus pour le lycée.

Tabela 4 – Contexte éditorial et construction du corpus pour le lycée (15-18 ans)

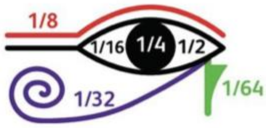
Classe	**manuels consultés (en unité)**	**manuels retenus (en unité)**	**Taux de présence (en %)**	**Extraits considérés**
2^{nde}	9	2	22	Fig. 13, 14
$1^{ère}$ (spécialité)	9	1	11	Fig. 15
T^{ale} (experte, spécialité, complémentaire)	8	0	0	
Total	26	3		

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 12 – Exemple de manuels scolaires (seconde) : Les fractions égyptiennes et l'algorithme de Fibonacci

88 ALGO **Fractions égyptiennes**

Il y a plus de 3 000 ans, les Égyptiens utilisaient uniquement, à l'exception de $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$,



les fractions de la forme $\frac{1}{n}$ et les sommes $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\ldots$ de plusieurs fractions de dénominateurs p, q, … **tous** différents. Ainsi la fraction $\frac{3}{7}$ s'écrivait $\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$ au lieu de $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$.

Voici un algorithme, décrit par Léonard de Pise, dit Fibonacci, dans le *Liber abaci* paru en 1202, permettant d'écrire « à l'égyptienne » toute fraction f d'entiers naturels non nuls strictement inférieure à 1, écrite sous forme irréductible.

La fonction E désigne la partie entière.

```
Fonction Décomposition(f)
    L ← Liste_vide
    Tant que le numérateur de f n'est pas égal à 1 Faire
        p ← E(1/f)+1
        Ajouter p à L
        f ← f − 1/p
        Écrire f sous forme irréductible
    Fin Tant que
    Ajouter 1/f à L
    Renvoyer L
Fin Fonction
```

1. Vérifier que la fonction Décomposition $\left(\frac{3}{7}\right)$ renvoie la liste $L=\{3;11;231\}$.

2. Écrire « à l'égyptienne » les nombres $\frac{11}{12}$; $\frac{7}{10}$ et $\frac{5}{11}$.

Info

L'écriture d'une fraction comme somme de termes en $\frac{1}{p}$ n'est pas unique. Ainsi $\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}=\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\frac{1}{84}$.
L'algorithme de Fibonacci donne une écriture possible.

Fonte: Beltramone (2019, p. 56-57)

Figura 13 – Exemple de manuels scolaires (seconde) : fractions égyptiennes et algorithmique

84 ALGO TICE **Apophis *vs* Python**

Les Égyptiens utilisaient l'égalité qui s'écrit, avec nos notations actuelles, pour *n* entier strictement positif :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

1. Tester cette égalité pour 5 valeurs différentes de *n*.

2. Prouver que cette égalité est vraie pour tout $n > 0$.

3. La fonction **apophis** suivante permet de tester cette égalité pour une valeur de *n* choisie lors de son appel.

```
1  def apophis(n):
2      a = 1/n
3      b = 1/(n + 1) + 1/(n*(n + 1))
4      test = (b == a)
5      return(test)
```

a. Lorsque *n* est de type « *integer* » (**int**), de quel type sont les variables *a* et *b* ?
Le vérifier soit en affichant le contenu des variables soit en utilisant l'instruction **type**.

b. À la ligne 4, il y a plusieurs utilisations du symbole « = ». Les expliquer.

c. Préciser alors le contenu possible de **test**.

d. Que renvoie **apophis(4)** ? Et **apophis(5)** ? Expliquer pourquoi.

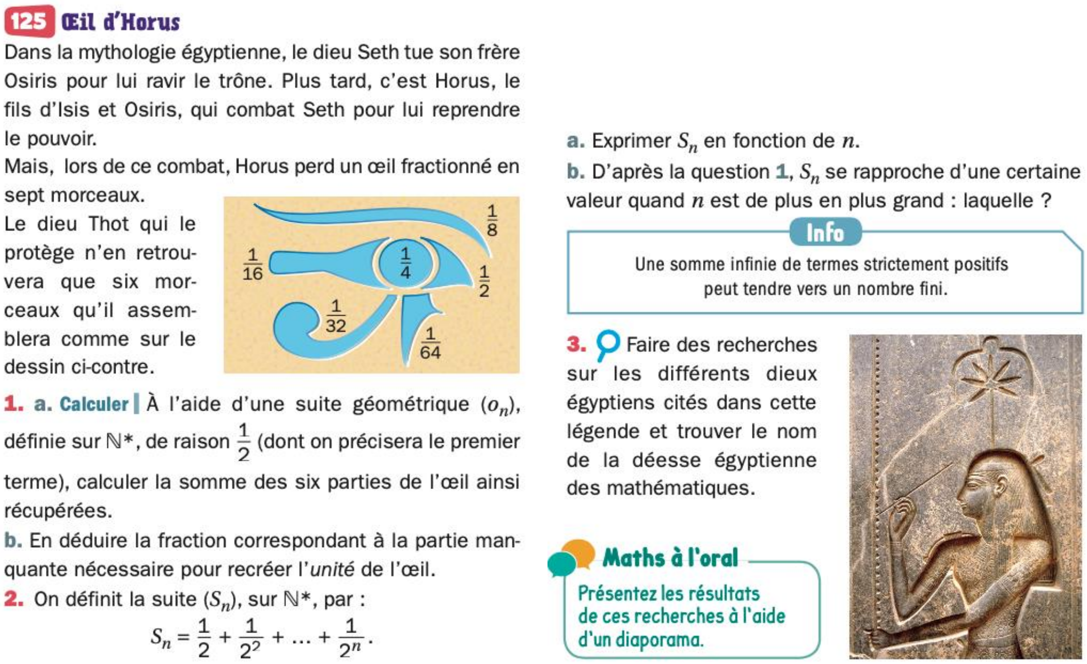
4. a. Écrire une instruction qui permet d'afficher les valeurs de *n* pour lesquelles l'égalité en Python n'est pas vérifiée.

b. Tester pour les entiers de 1 à 250 et calculer la proportion d'égalités non vérifiées en Python pour les entiers de 1 à 250.

AIDE → voir page 18

Fonte: Le Yaouanq (2019, p. 123)

Figura 14 – Exemple de manuels scolaires (première) : œil d'Horus et suite géométrique


125 Œil d'Horus

Dans la mythologie égyptienne, le dieu Seth tue son frère Osiris pour lui ravir le trône. Plus tard, c'est Horus, le fils d'Isis et Osiris, qui combat Seth pour lui reprendre le pouvoir.

Mais, lors de ce combat, Horus perd un œil fractionné en sept morceaux.

Le dieu Thot qui le protège n'en retrouvera que six morceaux qu'il assemblera comme sur le dessin ci-contre.

1. a. Calculer | À l'aide d'une suite géométrique (o_n), définie sur $\mathbb{N}^*$, de raison $\frac{1}{2}$ (dont on précisera le premier terme), calculer la somme des six parties de l'œil ainsi récupérées.

b. En déduire la fraction correspondant à la partie manquante nécessaire pour recréer l'*unité* de l'œil.

2. On définit la suite (S_n), sur $\mathbb{N}^*$, par :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. D'après la question **1**, S_n se rapproche d'une certaine valeur quand n est de plus en plus grand : laquelle ?

Info

Une somme infinie de termes strictement positifs peut tendre vers un nombre fini.

3. Faire des recherches sur les différents dieux égyptiens cités dans cette légende et trouver le nom de la déesse égyptienne des mathématiques.

Maths à l'oral

Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

Fonte: Darthos & Roland (2019, p. 69)

2.3. Discussions

Ce sont les classes de 5e/4e (ou cycle 4) pour le collège et 2nde pour le lycée qui sont principalement concernées dans notre article. Il faut évidemment y voir une réponse au programme de mathématiques des classes concernées. Les écritures et calculs fractionnaires sont centraux au cycle 4 dans la rubrique « nombres et calculs », avec une première approche de la fraction-nombre en 6e. Les « fractions égyptiennes » sont explicitement mentionnées dans les idées de croisements entre disciplines, dans le domaines « langues et culture de l'Antiquité » (MEN, 2015, p. 380). Quant au lycée, en seconde, les élèves sont amenés à consolider la pratique du calcul sur les fractions et à approfondir leur connaissance des nombres rationnels. Par ailleurs, dans l'item « histoire des mathématiques » du programme, il est mentionné qu'il est possible d'étudier des textes anciens d'auteurs tels que Fibonacci (entre autres) et mettre en évidence leurs aspects algorithmiques sans plus de détails (MEN, 2019a, p. 380). On assite alors à de véritables « occasions manquées » (ou « perdues ») : situations d'apprentissage mathématique où l'utilisation de sources historiques pourrait aller de soi mais n'est pas convoquée. Ici, par exemple, relier l'algorithmique aux quantièmes est une excellente idée car c'est une rencontre que peut facilement illustrer le texte de Fibonacci. Dans la fig. 13 (comme dans la fig. 11), les auteurs préfèrent partir de la relation $\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)}$ $(p \in \mathbb{N}*)$ qui ne serait qu'au mieux implicitement historique (c'est-à-dire reconstruite par les mathématiciens ou historiens tardifs). Dans la fig. 14, les auteurs créent artificiellement une suite d'inverses de puissance de 2 partant de l'œil d'Horus : le passage est d'ailleurs assez ténébreux et on s'interroge sur ce que l'élève peut s'imaginer quant au rôle réel du scribe égyptien dans ces écritures modernes. Les « occasions manquées » sont aussi fort nombreuses au collège avec le potentiel des quantièmes, les *tables* égyptiennes de décomposition des fractions doubles et les différents cas mis en œuvre par Fibonacci dans sa méthode : de nombreux calculs fractionnaires, comparaison de fractions, correspondant à des références historiques, sont facilement envisageables.

Thématiquement, les extraits mentionnent majoritairement l'œil d'Horus : 9 extraits sur 14, seuls trois d'entre eux le décrivent comme une légende ou un mythe. À la lecture des manuels scolaires, les élèves peuvent majoritairement être convaincus du lien entre les mathématique et l'ésotérisme de la représentation de l'œil d'Horus. La remise en cause explicite de la représentation des quantièmes dans l'œil du Dieu n'est pas intégrée dans la sphère éducative ; elle date pourtant au plus tard de Ritter (2002). Plus encore, une bon tiers de notre corpus présente explicitement les « fractions égyptiennes » comme un véritable « système » avec des fractions unitaires, sans revenir sur l'historiographie et la notion même de fractions ou de concept de nombres (HØYRUP, 2019 ; CHEMLA, 2022). Nous décelons ici des «occasions manquées». En effet, la richesse des sources égyptiennes et des discussions historiographiques pourraient être mieux exploitée pour davantage répondre aux deux orientations mentionnées par Furinghetti (2020) dans sa récente revue de littérature : (1) « l'histoire pour promouvoir les mathématiques » ; (2) « l'histoire des mathématiques pour construire la connaissance mathématique ». En particulier, la notion de *table* numérique si importante dans les mathématiques égyptiennes est totalement absente. En outre, seul un extrait (fig. 6) mentionne les fractions doubles (de type $\frac{2}{n}$, n >2), sans les exploiter réellement.

Un autre effet pervers de l'implémentation de l'histoire des mathématiques dans nos manuels concerne, comme je l'ai déjà mentionné, les notations utilisées : seuls trois extraits présentent la manière d'écrire un quantième en Égypte, les autres laissant l'élève implicitement penser (voire intégrer) que les fractions (ou même les suites) existent au moins depuis l'Antiquité égyptienne avec un numérateur, un dénominateur et une barre de fraction ! Encore une fois, dans ces conditions, comment l'élève peut-il se rendre compte de l'évolution des concepts mathématiques ? Le retour aux sources, riche de sens, me paraît inévitable : il ne s'agit pas de faire bien ou de faire beau, l'histoire des mathématiques n'est pas un prétexte mais, dans de bonnes conditions, aide l'élève à construire le sens mathématique en revenant à l'origine et aux interrogations premières. On ne peut laisser croire un élève que le scribe égyptien aurait pu manipuler des suites géométriques (fig. 14). Le sens des mathématiques comme construction/discipline humaine disparaît : qu'ont fait les hommes et les femmes depuis l'Antiquité ? En outre, le corpus relatif au collège concerne principalement les quantièmes : l'élève perd à nouveau l'idée d'une « mathématique en évolution », d'une discipline cumulative (construire un nouveau savoir à partir de connaissances antérieures). Seuls deux extraits citent Fibonacci (et aucun mathématicien postérieur, plus récent) et en invoquant des résultats qui ne sont pas dans son *Liber Abbaci* (fig. 11), ou en altérant ses propos (fig. 12) avec des notations totalement anachronique.

Enfin, la réforme de 2015 pour le collège n'a pas modifié le rapport à l'histoire des mathématiques si je me fie aux extraits concernant les quantièmes. Suivant la catégorisation des tâches de Schorcht (2018a, 2018b), les extraits sont tous, dans leur dimension génétique, en lien avec le passé. Il faut attendre les extraits du lycée pour y voir un lien avec le présent (avec l'algorithmique, ou la notion formelle de suite) : c'est la grande différence entre les tâches du lycée par rapport aux tâches du collège. En outre, les extraits post-réforme 2015 seraient peut-être davantage dans l'action mathématique (4/5) tandis qu'ils ne sont que 3 sur 6 avant la réforme (mais il faudrait étendre cette étude à des extraits sur d'autres thèmes pour établir une véritable observation).

CONCLUSION

Dans cet article, j'ai été amené à interroger la pertinence historique de l'intégration de l'histoire des mathématiques dans les manuels. J'aimerais conclure sur la relation entre histoire et didactique. Avant de discuter en détail de la notion d'obstacles épistémologiques et de différentes acceptions du mot « conception » pour les didacticiens, Michele Artigue (1989) établit des relations entre épistémologie et didactique qui sont, pour moi, toujours aussi profondes et d'actualité. L'analyse épistémologique aide en particulier à :

> - redonner une historicité aux concepts mathématiques que l'enseignement usuel tend à présenter comme des objets universels, à la fois dans le temps et dans l'espace,
> - […] redonner une historicité également à des notions métamathématiques comme celle de rigueur alors que l'enseignement usuel cultive la fiction d'une rigueur éternel et parfaite des mathématiques (ARTIGUE, 1989, p. 1).

Beaucoup plus récemment, dans l'introduction de l'ouvrage collectif « épistémologie & didactique », les éditeurs reprennent :

> L'épistémologie, en s'appuyant sur l'histoire des sciences, permet de comprendre comment [l]es connaissances [scientifiques] ont été constituées : dans quel contexte scientifique, socio-culturel et économique, sous l'impulsion de quelles motivations, suivant quelles méthodes, quelles étapes et en surmontant quels problèmes. Elle permet également de cerner le statut et les fonctions des différents concepts, modèles et théories scientifiques (BÄCHTOLD et al., 2020).

Et Jean-Luc Dorier (2020) insiste encore plus explicitement dans son chapitre (citant en fin de paragraphe Chevallard et al. (1991, p. 15)) :

> Ainsi une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné. En outre, le processus de transposition didactique est complexe, il ne commence pas au moment où l'enseignant prépare son cours, il est au contraire à ce moment-là dans sa phase finale, l'enseignant n'ayant plus que le contrôle de variables locales dans la présentation du texte du savoir. Le chercheur en didactique est donc tenu de remonter aux sources de ce processus, jusqu'à la production du savoir savant, pour « se déprendre de la familiarité de son objet d'étude, et exercer sa vigilance épistémologique » (DORIER, 2020)

Il me semble que c'est précisément le rôle d'un enseignant (et surtout d'une formateur d'enseignants) que de donner à voir cette historicité, en convoquant comme il se doit l'histoire de sa discipline. C'est, pour moi, une des conditions qui permet à l'enseignant, à partir de travaux historiques et didactiques, d'atteindre les deux axes proposés par Furinghetti (2020). Contrairement à ce que pouvait écrire Brousseau (1998) et même si la notion de quantième égyptien est une « connaissance fossile », j'ai montré ici que la notion était riche[11]. En effet, travailler sur les quantièmes égyptiens peut permettre d'approfondir très tôt les manipulations sur les nombres rationnels (et notamment leur somme) et la notion d'inverse, sans que ce soit artificiel. Il y a ici un sujet double : pratique (comparer, additionner des fractions de dénominateurs différents et non nécessairement multiples) et théorique (appréhender la dialectique grandeurs/nombres, le concept de nombres rationnels et de quantièmes comme « part de… » et non comme fraction-quotient). Comment faisaient-ils avant ? comment pensaient-ils avant ? dans quel contexte ?

> Pour écrire une histoire complètement contextualisée, l'historien devrait mettre hors circuit les connaissances historiques actuelles sur les mathématiques antérieures à l'auteur, les théories mathématiques actuelles, aussi bien que les conceptions philosophiques ou épistémologiques inconnues de l'auteur. (BARBIN, 2002, p. 141)

Nous sommes devant les responsabilités partagées des didacticiens et des historiens : le travail de l'historien n'est pas de raconter des histoires mais de chercher à comprendre le passé

[11] Cette observation est partagée par Perrin (2007), Gardes (2010) et Gardes & Mizony (2012).

par un travail nécessairement long et fastidieux, partant de sources factuelles et suivant une méthode critique. Le travail du didacticien est, quant à lui, d'interroger la pertinence des tâches dévolues aux élèves pour accéder aux concepts et méthodes mathématiques sans que l'histoire soit réduite à un prétexte mais qu'elle prenne tout son sens épistémologique. Ainsi, à défaut de modifier les éléments historiques, il faudrait au moins pouvoir mettre les élèves (ou les enseignants en formation) dans une position critique à la fois vis-à-vis de l'histoire des mathématiques et des tâches didactiques.

RÉFÉRENCES

Manuels de mathématiques

BARNET, Christophe (org.). **Mission Indigo**: maths. 6. ed. Paris: Hachette, 2021.

BOULLIS, Marc (org.). **Myriade**: maths. 5. ed. Paris: Bordas, 2021.

BELTRAMONE, Jean-Paul (org.). **Déclic**: mathématiques 2. ed. Paris: Hachette, 2019.

BRAULT, Roger; DARO, Isabelle; FERRERO, Christine; PERBOS-RAIMBOURG, Dominique; TELMON, Christophe. **Phare:** mathématiques. 5. ed. Paris: Hachette, 2010.

CHAPIRON, Gisèle; MANTE, Michel; MULET-MARQUIS, René; PÉROTIN, Catherine. **Triangle**: mathématiques. 5.ed. Paris: Hatier, 2010.

CHAPIRON, Gisèle; MANTE, Michel; MULET-MARQUIS, René; PÉROTIN, Catherine. **Triangle**: mathématiques. 4. ed. Paris: Hatier, 2011.

CHESNÉ, Jean-François; LE YAOUANQ Marie-Hélène (org.). Horizon: Maths. 4. ed. Paris: Didier, 2011.

DARTHOS, Paul; ROLAND, Christophe (org.). **Variations**. 1. ed. Paris: Hachette, 2019.

JOLY, Vincent (org.). **TAM**: maths. 6. ed. Paris: Hatier, 2022.

LANATA, Fabienne (org.). **Maths monde cycle 4**. vol.1. Paris: Didier, 2016.

LE YAOUANQ Marie-Hélène (org.). **Maths'x**. 2. ed. Paris: Didier; 2019.

MALAVAL, Joël (org.). **Transmath 6^e^**. Paris: Nathan, 2013.

MALAVAL, Joël (org.). **Transmath 5^e^**. Paris: Nathan, 2022.

MALAVAL, Joël; Courbon, Denise (org.). **Transmath 5^e^**. Paris: Nathan, 2010.

Biliographie secondaire

ARTIGUE, Michèle. Épistémologie et Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques.** v. 10. n2/3, p. 241-286, 1991. Disponible sur: <https://hal.science/hal-

02138030/>. Consulté le 14 mars 2023.

BÄCHTOLD, Manuel; DURAND-GUERRIER, Viviane; MUNIER, Valérie. Épistémologie & didactique : synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales. In: BÄCHTOLD, Manuel; DURAND-GUERRIER, Viviane; MUNIER, Valérie (org.). **Épistémologie & didactique** : synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales. Besançon: Presses Universitaires de Franche-Comté, 2020. p. 9-19. Disponible sur: <https://books.openedition.org/pufc/11232?lang=fr>. Consulté le 14 mars 2023.

BARBIN, Évelyne. L'écriture de l'histoire: la place du sujet et le temps de son acte. In **4000 ans d'histoire des mathématiques**: l'histoire sur le long terme. Rennes: IREM de Rennes, 2002, p. 141-154. Disponible sur: https://publimath.univirem.fr/numerisation/WH/IWH02010/IWH02010.pdf. Consulté le 19 mars 2023.

BONCOMPAGNI, Baldassarre. **Scritti di Leonardo Pisano**. v. 1. Rome: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 1857

BROUSSEAU, Guy P. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In: BEDNARZ, Nadine; GARNIER, Catherine (org.). **Constructions des savoirs: obstacles et conflits**. Ottawa: Cirade, Les éditions Agence d'Arc, 1989. p. 41-63.

BROUSSEAU, Guy P. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In: BROUSSEAU, Guy. **La théorie des situations didactiques**. Grenoble: La pensée sauvage, 1998. p.115-160.

CAVEING, Maurice. Le statut arithmétique du quantième égyptien. In: BENOIT, Paul; CHEMLA, Karine; RITTER, Jim (éds.). **Histoire de fractions, fractions d'histoire**. Bâle, Boston, Berlin : Birkhäuser Verlag, 1992. p.39-52.

CHEMLA, Karine. Cultures of Computation and Quantification in the Ancient World: An Introduction. In: CHEMLA, Karine; KELLER, Agathe; PROUST, Christine (org.). **Cultures of Computation and Quantification in the Ancient World: Numbers, Measurements, and Operations in Documents from Mesopotamia, China and South Asia**. Cham : Springer, 2022. p. 1-140. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-98361-1_1>.

CHEVALLARD, Yves; JOSHUA, Mary-Alberte. *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991. (2e édition revue et augmentée)

CHORLAY, Renaud; CLARK, Kathleen Michelle; TZANAKIS Constantinos. Exploring the significance of the history of mathematics in mathematics education. **ZDM – Mathematics Education**, v. 54, n. 7, 2022.

CLARK, Kathleen Michelle; KJELDSEN, Tinne Hoff; SCHORCHT, Sebastian; TZANAKIS, Constantinos; WANG, Xiaoqin. History of mathematics in mathematics education: Recent developments. In: RADFORD, Luis; FURINGHETTI, Fulvia; HAUSBERGER Thomas (eds.), ICME, 2016, Montpellier.**Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting – HPM 2016.** Montpellier: Irem de Montpellier, 2016. 0p. 135-179. Disponible sur

<https://hal.science/hal-01349230/document>. Consulté le 14 mars 2023.

CLARK, Kathleen Michelle; KJELDSEN, Tinne Hoff; SCHORCHT, Sebastian; TZANAKIS, Constantinos. Introduction: Integrating history and epistemology of mathematics in mathematics education. In: CLARK, Kathleen Michelle; KJELDSEN, Tinne Hoff; SCHORCHT, Sebastian; TZANAKIS, Constantinos (eds.), **Mathematics, education and history**: Towards a harmonious partnership. Cham: Springer, 2018a. p.1-23. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_1>.

CLARK, Kathleen Michelle; KJELDSEN, Tinne Hoff; SCHORCHT, Sebastian; TZANAKIS, Constantinos (eds.). **Mathematics, education and history**: Towards a harmonious partnership. Cham: Springer, 2018b. (ICME-13 Monographs) DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3>.

CLARK, Kathleen Michelle; KJELDSEN, Tinne Hoff; SCHORCHT, Sebastian; TZANAKIS, Constantinos. History of mathematics in mathematics education – An overview. **Mathematica Didactica**, v. 41, n.1, p.1-26, 2019. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2019.1374>.

CORRY, Leo. **A brief history of numbers**. Oxford: Oxford University Press, 2015.

DORIER, Jean-Luc. La didactique des mathématiques: une épistémologie expérimentale? BÄCHTOLD, Manuel; DURAND-GUERRIER, Viviane; MUNIER, Valérie (org.). **Épistémologie & didactique: Synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales**. Besançon: Presses universitaires de Franche-Comté, p. 23-44, 2020. Disponible sur <https://books.openedition.org/pufc/11312?lang=fr>. Consulté le 14 mars 2023.

DUNTON, Marguerite; GRIMM Richard. Fibonacci on Egyptian Fractions. **The Fibonacci Quaterly**, v. 4, p. 339-354. 1966.

FAUVEL, John; VAN MAANEN, Jan (eds.) **History in mathematics education: The ICMI study**. Dordrecht : Kluwer, 2002. (New ICMI Studies Series, vol. 6) DOI: <https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1>.

FURINGHETTI, Fulvia. Rethinking history and epistemology in mathematics education. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 51, n. 6, p.967-994, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454>.

GARDES, Marie-Line. Démarche d'investigation en arithmétique, entre essais et conjectures. Un exemple en classe de terminale Scientifique. **Petit x**. v. 83, p.51-78, 2010. Disponible sur: <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/83x4_1560851821159-pdf>. Consulté le 14 mars 2023.

GARDES, Marie-Line; MIZONY, Michel. La conjecture d'Erdös-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur. **Repères-IREM**. v. 87, p.79-90, 2012. Disponible sur: https://www.univ-irem.fr/reperes/articles/87_article_590.pdf. Consulté le 14 mars 2023.

GARDINER, Alan H. **Egyptian Grammar**. Oxford: Clarendon Press. 1927

GAZIT, Avikam. What do mathematics teachers and teacher trainees know about the history of mathematics? **International Journal of Mathematical Education in Science and**

Technology, v.44, n. 4, p.501-512, 2012. DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2012.742151>.

GIUSTI, Enrico. **Leonardo Bigolli Pisani vulgo Fibonacci, Liber Abbaci**. Florence: Olschki. 2020.

GUILLEMOT, Michel (1992). Les notations et les pratiques opératoires permettent-elles de parler de “fractions égyptiennes”? In: BENOIT, Paul; CHEMLA, Karine; RITTER, Jim (éds.). **Histoire de fractions, fractions d'histoire**. Bâle, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992. p.53-69.

HØYRUP, Jens. What Is a Number? What Is a Concept? Who Has a Number Concept? In: RENN Jürgen; SCHEMMEL Matthias (eds.), **Culture and Cognition: Essays in Honor of Peter Damerow**. Berlin: Max Planck Institute for the History of Science, 2019. p. 29-33. Disponible sur: <https://www.mprl-series.mpg.de/proceedings/11/index.html>. Consulté le 14 mars 2023.

IMHAUSEN, Annette. Ancient Egyptian mathematics: New perspectives on old sources. **The Mathematical Intelligencer**, v. 28, n.1, p.19-27, 2006.

Doi: <https://doi.org/10.1007/BF02986998>.

IMHAUSEN, Annette. Egyptian mathematics. In KATZ, Victor (ed.). **The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook**. Princeton – Oxford: Princeton University Press, 2007. p.7-56.

IMHAUSEN, Annette. **Mathematics in Ancient Egypt**: a contextual history. Princeton: Princeton University Press, 2016

LAGAIZE, Sandrine. La conjecture d'Erdös-Straus. **Images des Mathématiques**, CNRS, 2022. Disponible sur: <https://images.math.cnrs.fr/La-conjecture-d-Erd\%C5\%91s-Straus>. Consulté le 14 mars 2023.

MEN – Ministère de l'éducation nationale. FRANCE. Arrêté du 9 novembre 2015 publié dans le BO spécial n°11 (26 novembre 2015) : 2015. Disponible sur: <https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=33400>. Consulté le 14 mars 2023.

MEN – Ministère de l'éducation nationale. FRANCE. Décret du 17 janvier 2019 publié dans le BO n°1 (22 janvier 2019) :2019a. Disponible sur:

<https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=38502>. Consulté le 14 mars 2023.

MEN – Ministère de l'éducation nationale. FRANCE. Décret du 19 juillet 2019 publié dans le BO n°8 (25 juillet 2019): 2019b. Disponible sur :

<https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=39051>. Consulté le 14 mars 2023.

MICHEL, Marianne. **Les mathématiques de l'Égypte ancienne**: Numération, métrologie, arithmétique, géométrie et autres problèmes. Bruxelles: Éditions Safran, 2014.

MOYON, Marc. Desire of teachers and realities in textbooks: dealing with history of mathematics in the new French curriculum and its impact on teacher training. **ZDM – Mathematics Education**, v.54, n.7, p. 1613-1630, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01427-6>.

MOYON, Marc; SPIESSER, Maryvonne. L'arithmétique des fractions dans l'œuvre de Fibonacci: fondements & usages. **Archive for History of Exact Sciences**. v. 69, n. 4, p.391-427, 2015. <https://doi.org/10.1007/s00407-015-0155-y>.

PERRIN, Daniel. L'expérimentation en mathématiques. **Petit x**. v. 73, p. 6-34, 2007. Disponible sur: <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/73x1_1560957456434-pdf>. Consulté le 14 mars 2023.

RITTER, Jim. Metrology and the prehistory of fractions. In: BENOIT, Paul; CHEMLA, Karine; RITTER, Jim (éds.). **Histoire de fractions, fractions d'histoire**. Bâle, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992. p.19-34.

RITTER, Jim. Egyptian Mathematics. In SELIN Helaine (ed.), **Mathematics Across Cultures**: The History of Non-Western Mathematics. Dordrecht: Springer, 2000. p.115-136. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-4301-1>.

RITTER, Jim. Closing the Eye of Horus: The Rise and Fall of "Horus-eye Fractions". In Steele, John M.; Imhausen, Annette (éds.), **Under One Sky: Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East**. Münster: Ugarit-Verlag, 2002. p. 297-323

RITTER, Jim. Mathematics in Egypt. In SELIN Helaine (ed.), **Encyclopedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures**. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2008, vol. 1. p. 1378-1381. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4425-0_8739>.

SCHORCHT, Sebastian. **Typisierung mathematikhistorischer Beispiele in deutschen Mathematikschulbüchern der Klassenstufen 1 bis 7**, Münster: WTM, Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, 2018a. (Schriften zur Geschichte der Mathematik und ihrer Didaktik, 4)

SCHORCHT, Sebastian. History of Mathematics in German Mathematics Textbooks: typology of tasks. In CLARK, Kathleen Michelle; KJELDSEN, Tinne Hoff; SCHORCHT, Sebastian; TZANAKIS, Constantinos (eds.), **Mathematics, education and history**: Towards a harmonious partnership. Cham: Springer, 2018b. p.143-162. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_8>.

SIGLER, Laurence. **Fibonacci's Liber Abaci**. New York: Springer. 2002. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences)

SYLVESTER, James Jospeh. On a point in the theory of vulgar fractions. **American Journal of Mathematics**, v. 3, n. 4, 1880, p.332-335. Disponible sur: <https://archive.org/details/jstor-2369261/mode/2up>.

THANHEISER, Eva; MELHUISH, Kathleen. Leveraging variation of historical number systems to build understanding of the base-ten place-value system. **ZDM – Mathematics Education**, v. 51 n. 1, , p.39-55, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0984-7>.

ANNEXES

Annexe 1 : Traduction Française du *Liber Abbaci*, Fibonacci

La traduction française[12] qui suit a été réalisée à partir de l'édition de référence publiée par Giusti (2020, p.131-139), en conservant le plus possible l'esprit original du texte latin (en particulier les écriture fractionnaires)[13]. Cet extrait décrit la manière avec laquelle Fibonacci transforme toute fraction en somme de fractions unitaires. J'ai choisi de traduire l'ensemble des règles à suivre ainsi qu'un exemple. J'ai ensuite listé les exemples traités par Fibonacci entre crochets. Comme nous l'avons signalé, il s'agit d'un algorithme par disjonction de cas. Au total, il présente 7 cas où le dernier englobe naturellement toutes les fractions qui n'auraient pas été traitées dans les cas précédents (tableau 1).

Je détaille ci-après les règles élémentaires sur l'écriture des fractions dans le *Liber Abbaci* de Fibonacci. Le pisan use de plusieurs genres de fractions, toutes nécessairement avec le numérateur inférieur au dénominateur, et d'écritures auxquelles le lecteur moderne n'est pas habitué (MOYON et al., 2015). En particulier, dans l'extrait suivant, il utilise :

- Les fractions unitaires $\frac{1}{b}$ (avec $b \neq 0$) ;
- Les fractions simples $\frac{a}{b}$ (avec $a < b$) ;
- La somme de fractions simples $\frac{a_1}{b_1}\,\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}$;
- La fraction $\frac{a_1 \quad a_2}{b_1 \quad b_2}$ est égale à $\frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_2} \times \frac{a_1}{b_1}$;
- La fraction $\frac{\underline{a_1} \quad \underline{a_2} \quad \underline{a_3} \quad a_4}{b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4}$ est égale à $\frac{a_4}{b_4} + \frac{1}{b_4} \times \left(\frac{a_3}{b_3} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1}\right)$.

J'indique entre crochets droits un ou des mots utiles à la lecture mais non présents dans le texte original. J'indique par […] un passage que je n'ai pas traduit.

À propos du premier cas.

Le premier [cas] *est lorsque le plus grand nombre qui est sous la barre de fraction est divisible par le plus petit, c'est-à-dire par celui qui est sur la barre de fraction. La règle pour ce cas est de diviser le plus grand par le plus petit, et tu auras la partie du plus petit par rapport au plus grand.*

Par exemple, nous voulons connaître quelles parties de l'unité sont $\frac{3}{12}$. *12 est divisible par 3, il en résulte 4 pour lequel tu dis* $\frac{1}{4}$ [...].

[Autres exemples: $\frac{4}{20}$; $\frac{5}{100}$; $\frac{2 \quad 0}{4 \quad 9}$; $\frac{3 \quad 0}{9 \quad 10}$; $\frac{3 \quad 0}{5 \quad 9}$; $\frac{4 \quad 0}{7 \quad 8}$; $\frac{5 \quad 0}{10 \quad 9}$]

[12] À ma connaissance, aucune traduction française de ce passage n'existe. Seules deux traductions anglaises ont été réalisées par Sigler (2002, p. 119-122) et Dunton et al. (1966) à partir de l'édition de Boncompagni (1857).
[13] Je remercie ici mes étudiantes et étudiants du master MEEF de l'université de Limoges qui ont lu et apprécié ce texte.

À propos du second cas

Le second cas est lorsque le plus grand nombre n'est pas divisible par le plus petit mais, du plus petit, on peut faire de telles parties qui divisent toutes le plus grand. La règle pour ce cas est de faire des parties du plus petit par lesquelles le grand peut être divisé, et que le plus grand soit divisé par chacune des parties, et tu auras les fractions unitaires que le plus petit fait avec le plus grand.

Par exemple, nous voulons séparer $\frac{5}{6}$ *en fractions unitaires. Comme 6 n'est pas divisible par 5,* $\frac{5}{6}$ *n'est pas du premier cas. Mais comme 5 est séparable en deux parties, à savoir en 3 et en 2, par lesquelles le plus grand, à savoir 6, est divisible, on affirme que la fraction* $\frac{5}{6}$ *appartient au second cas. D'où 6 est divisé en 3 et en 2, il en résulte 2 et 3. Pour le 2, on prend* $\frac{1}{2}$ *et pour le 3, on prend* $\frac{1}{3}$*.* $\frac{5}{6}$ *est donc* $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ *de l'unité; ou d'une autre manière,* $\frac{5}{6}$ *est séparée en* $\frac{3}{6}$ *et* $\frac{2}{6}$*. Chacune de ces deux fractions sera du premier cas, à savoir* $\frac{3}{6}$ *est* $\frac{1}{2}$*, et* $\frac{2}{6}$ *est* $\frac{1}{3}$*. D'où* $\frac{5}{6}$ *est* $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$*, comme nous l'avons dit précédemment.*

[Autres exemples: $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$ dans $\frac{3\quad 0}{4\quad 10}$; $\frac{5}{8}$ dans $\frac{5\quad 0}{8\quad 10}$; $\frac{3\quad 0}{5\quad 10}$; $\frac{5\quad 0}{7\quad 8}$]

Mais comme nous savons que les premiers et seconds cas sont nécessaires surtout pour le commerce, nous montrons maintenant des séparations de fractions en nombres dans des tables que vous devez avoir en tête de manière à comprendre ce que nous souhaitons dire dans cette partie [fig. 15].

Le troisième cas de séparation

Le troisième cas est celui où un plus le plus grand nombre est divisible par le plus petit. La règle pour ce cas est de diviser le nombre qui est 1 plus le plus grand par le plus petit. Et du résultat de la division, ce sera une fraction de l'unité telle le plus petit du plus grand et à cette partie s'ajoute la partie qu'est 1 du plus grand nombre.

Par exemple, nous voulons faire des fractions unitaires de $\frac{2}{11}$ *qui est bien de ce cas car un plus 11, à savoir 12, est divisible par 2 qui est sur la barre de fraction. De cette division vient 6 qui donne* $\frac{1}{6}$*, et à cela est ajouté une sixième partie de* $\frac{1}{11}$*, à savoir* $\frac{1\quad 0}{6\quad 11}$*, pour les fractions unitaires de* $\frac{2}{11}$*.*

[Autres exemples: $\frac{3}{11}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{5}{19}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{2\quad 0}{3\quad 7}$; $\frac{4\quad 0}{7\quad 9}$; $\frac{3\quad 0}{7\quad 11}$; $\frac{3\quad 0}{7\quad 8}$]

À propos du même cas

C'est en effet du même cas lorsqu'à partir du nombre plus petit – qui est au-dessus de la barre de fraction – peut être fait deux parties, qui divisent toutes un plus le plus grand.

[Exemples: $\frac{8}{11}$; $\frac{9}{11}$; $\frac{10}{11}$]

Figura 15 – Table de séparation

Partes de 6	
1 de 6 est	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$

Partes de 8	
1 de 8 est	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
7	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$

Partes de 12	
1 de 12 est	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{6}\ \frac{1}{4}$
6	$\frac{1}{2}$
7	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$
8	$\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}$
9	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
10	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$
11	$\frac{1}{6}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$

Partes de 20	
1 de 20 est	$\frac{1}{20}$
2	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{1}{20}\ \frac{1}{10}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{4}$
6	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{5}$
7	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{4}$
8	$\frac{2}{5}$
9	$\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}$
10	$\frac{1}{2}$
11	$\frac{1}{20}\ \frac{1}{2}$
12	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{2}$
13	$\frac{1}{20}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{2}$
14	$\frac{1}{5}\ \frac{1}{2}$
15	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
16	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{2}$
17	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
18	$\frac{1}{15}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$
19	$\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$

(149) *Partes de 24*	
1 de 24 est	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{12}\ \frac{1}{8}$
6	$\frac{1}{4}$
7	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{6}$
8	$\frac{1}{3}$
9	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{4}$
10	$\frac{1}{6}\ \frac{1}{4}$
11	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{3}$
12	$\frac{1}{2}$
13	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{4}$
14	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$
15	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{2}$
16	$\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}$
17	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$
18	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
19	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{2}$
20	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$
21	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
22	$\frac{1}{6}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
23	$\frac{1}{8}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$

Partes de 60	
1 de 60 est	$\frac{1}{60}$
2	$\frac{1}{30}$
3	$\frac{1}{20}$
4	$\frac{1}{15}$
5	$\frac{1}{12}$
6	$\frac{1}{10}$
7	$\frac{1}{60}\ \frac{1}{10}$
8	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{30}$
9	$\frac{1}{20}\ \frac{1}{10}$
10	$\frac{1}{6}$
11	$\frac{1}{60}\ \frac{1}{6}$
12	$\frac{1}{5}$
13	$\frac{1}{20}\ \frac{1}{6}$
14	$\frac{1}{15}\ \frac{1}{6}$
15	$\frac{1}{4}$
16	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{6}$
17	$\frac{1}{30}\ \frac{1}{4}$
18	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{5}$
19	$\frac{1}{15}\ \frac{1}{4}$
20	$\frac{1}{3}$
21	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{4}$
22	$\frac{1}{30}\ \frac{1}{3}$
23	$\frac{1}{20}\ \frac{1}{3}$
24	$\frac{1}{15}\ \frac{1}{3}$
25	$\frac{1}{12}\ \frac{1}{3}$
26	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{3}$
27	$\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}$
28	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}$
29	$\frac{1}{20}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{3}$
30	$\frac{1}{2}$
31	$\frac{1}{60}\ \frac{1}{2}$
35	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$
40	$\frac{1}{6}\ \frac{1}{2}$
50	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$

(150) *Partes de 100*	
1 de 100 est	$\frac{1}{100}$
2	$\frac{1}{50}$
3	$\frac{1}{100}\ \frac{1}{50}$
4	$\frac{1}{25}$
5	$\frac{1}{20}$
6	$\frac{1}{50}\ \frac{1}{25}$
7	$\frac{1}{50}\ \frac{1}{20}$
8	$\frac{2}{25}$
9	$\frac{1}{25}\ \frac{1}{20}$
10	$\frac{1}{10}$
15	$\frac{1}{20}\ \frac{1}{10}$
20	$\frac{1}{5}$
25	$\frac{1}{4}$
30	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{5}$
35	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{4}$
40	$\frac{2}{5}$
45	$\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}$
50	$\frac{1}{2}$
60	$\frac{3}{5}$
70	$\frac{1}{5}\ \frac{1}{2}$
75	$\frac{3}{4}$
80	$\frac{4}{5}$
85	$\frac{1}{10}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
95	$\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
96	$\frac{1}{100}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
97	$\frac{1}{50}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
98	$\frac{1}{100}\ \frac{1}{50}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$
99	$\frac{1}{25}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$

Fonte: Table de séparation dans Giusti (2020, p.132-133)

À propos du quatrième cas de séparation

Le quatrième cas est lorsque le plus grand est un nombre premier et que un plus le plus grand est divisible par le plus petit moins 1, comme $\frac{5}{11}$ *et* $\frac{7}{11}$*. La règle de ce cas est de soustraire 1 du plus petit, à partir duquel tu fais une fraction unitaire de l'unité, en conservant le nombre sous la fraction, quel qu'il soit, et après il te restera les parties en utilisant le troisième cas.*

Si tu soustrais $\frac{1}{11}$ *de* $\frac{5}{11}$*, il restera alors* $\frac{4}{11}$ *pour lequel tu auras les fractions unitaires* $\frac{1}{33}\frac{1}{3}$ *par le troisième cas, et avec le* $\frac{1}{11}$ *précédent ajouté, il en résultera* $\frac{1}{33}\frac{1}{11}\frac{1}{3}$*.*

[Autres exemples: $\frac{7}{11}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{6}{19}$; $\frac{7}{29}$]

À propos du cinquième cas

Le cinquième cas est lorsque le plus grand nombre est pair et un plus le plus grand est divisible par le plus petit moins 2. La règle de ce cas est lorsque tu soustrais 2 au plus petit nombre, lequel 2 sera d'après le premier cas et la différence sera [donnée] *par le troisième cas.*

Comme $\frac{11}{26}$ *à partir duquel si tu soustrais* $\frac{2}{6}$ *– ce qui est* $\frac{1}{13}$ *d'après la règle pour le premier cas –, il reste* $\frac{9}{26}$*, ils sont* $\frac{3 \quad 0 \quad 1}{3 \quad 26 \quad 3}$*, c'est-à-dire* $\frac{1}{78}\frac{1}{3}$*, auquel tu ajoutes* $\frac{1}{13}$*; ce sera* $\frac{1}{78}\frac{1}{13}\frac{1}{3}$ *pour les fractions unitaires de* $\frac{11}{26}$.

[Autre exemple: $\frac{11}{62}$]

À propos du sixième cas

Le sixième cas est lorsque le plus grand nombre est intégralement divisible par 3 et un plus le plus grand est divisible par le plus petit moins 3, comme $\frac{17}{27}$*. Sa règle est, lorsqu'à partir du nombre tu soustrais trois de ses parties, c'est-à-dire lorsque tu soustrais 3 du plus petit* [nombre]*, les trois parties* [du nombre] *sont dans le premier cas* [et] *le reste sera alors du troisième* [cas].

Ainsi si de $\frac{17}{27}$ *tu soustrais* $\frac{3}{27}$ *– qui sont* $\frac{1}{9}$ *selon le premier cas –, il restera* $\frac{14}{27}$ *qui d'après le troisième cas sont* $\frac{1}{54}\frac{1}{2}$ *; auxquels est ajouté* $\frac{1}{9}$ *précédent, ce sera* $\frac{1}{54}\frac{1}{9}\frac{1}{2}$ *pour les parties de* $\frac{17}{27}$.

[Autre exemple: $\frac{20}{33}$]

À propos du septième cas

Le septième cas est lorsqu'aucune des règles précédentes ne convient, sa règle est la plus utile [...].

Sa règle est de diviser le plus grand nombre par le plus petit et si le quotient n'est pas entier, considère-le entre les deux nombres entiers où tombe la division. S'il tombe entre 3 et 4 alors tu sais que le plus petit nombre est moins que $\frac{1}{3}$ *et plus que* $\frac{1}{4}$ *du plus grand; et s'il tombe entre 4 et 5, le plus petit* [nombre] *sera moins que* $\frac{1}{4}$ *et plus que* $\frac{1}{5}$ *du plus grand, et cela tu le comprends de n'importe quels deux nombres, entre deux entiers entre lesquels tombe la division. Ensuite, tu prends la fraction unitaire de la plus grande partie que le plus petit nombre est du plus grand, et conserve la différence qui restera alors. Si elle appartient à l'un des cas précédents, tu peux travailler avec; et si la différence n'est dans aucun des cas précédents, alors à partir de la différence tu prends encore la fraction unitaire de la plus grande partie, et cela tu le fais jusqu'à ce qu'il ne reste que des parties qui sont traitées par les cas précédents, ou bien jusqu'à ce que tu aies toutes les fractions unitaires que le plus petit sera du plus grand.*

Par exemple, nous voulons faire des fractions unitaires de $\frac{4}{13}$*. La division de 13 en 4 tombe entre 3 et 4 parce que les* $\frac{4}{13}$ *de l'unité sont moins que* $\frac{1}{3}$ *d'un entier et plus que* $\frac{1}{4}$*, alors nous savons que* $\frac{1}{4}$ *est la plus grande la partie unitaire que* $\frac{4}{13}$ *peut accepter.* $\frac{13}{13}$ *fait l'unité, alors sa quatrième partie, à savoir* $\frac{1 \quad 3}{4 \quad 13}$*,* *est* $\frac{1}{4}$ *de l'unité. Alors retranche* $\frac{1\quad 3}{4\quad 13}$ *de* $\frac{4}{13}$*, il restera* $\frac{3\quad 0}{4\quad 13}$ *qui par le second cas sont* $\frac{1\quad 1\quad 0}{4\quad 2\quad 13}$*, c'est-à-dire* $\frac{1\quad 1}{52\quad 26}$ *; ou bien parce que* $\frac{3\quad 0}{4\quad 13}$ *sont* $\frac{3}{52}$ *qui, par la règle du second cas donne également* $\frac{1\quad 1}{52\quad 26}$*. Nous avons donc, pour* $\frac{4}{13}$ *trois fractions unitaires, à savoir* $\frac{1}{52}\frac{1}{26}\frac{1}{4}$*.*

[Autres exemples: $\frac{3}{52}$; $\frac{9}{61}$]

De la même manière, nous voulons démontrer le mode pour $\frac{17}{29}$*. Tu divises 29 par 17, il en sort 1 et davantage car nous savons que* $\frac{17}{29}$ *est plus grand que la moitié de l'unité. Et notant que trois tiers, ou bien quatre quarts, ou bien* $\frac{5}{5}$ *ou bien* $\frac{6}{6}$ *font l'unité, de la même manière* $\frac{29}{29}$ *fait l'unité. Si nous prenons la moitié de ceci, à savoir* $\frac{1\quad 14}{2\quad 29}$*, et nous le retranchons de* $\frac{17}{29}$*, il restera* $\frac{1\quad 2}{2\quad 29}$*, c'est-à-dire* $\frac{5}{58}$*. Comme* $\frac{17}{29}$ *est* $\frac{5}{58}\frac{1}{2}$*, il est nécessaire de faire des fractions unitaires de* $\frac{5}{58}$*, à savoir à travers ce même cas. C'est pourquoi divise 58 par 5, il sortira 11 et davantage. D'où on sait que* $\frac{1}{12}$ *est la plus grande fraction unitaire qui soit dans* $\frac{5}{58}$*. D'où on prend* $\frac{1}{12}$ *de* $\frac{58}{58}$*, à savoir de l'unité, ce sera* $\frac{5\quad 4}{6\quad 58}$ *qui, retranché de* $\frac{5}{58}$*, donne* $\frac{1\quad 0}{6\quad 58}$*, c'est-à-dire* $\frac{1}{348}$*. Et ainsi tu as pour* $\frac{17}{29}$ *trois fractions unitaires, à savoir* $\frac{1}{348}\frac{1}{12}\frac{1}{2}$*.*

Annexe 2 : Exercice du concours de recrutement des professeurs des écoles (session 2012)

EXERCICE 2 (5 points)
On justifiera toutes les réponses.

On appelle « fraction égyptienne » toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$, n désignant un nombre entier naturel non nul. Dans l'Egypte ancienne, on n'écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 que sous la forme de sommes de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Par exemple, $\frac{25}{28}$ peut s'écrire $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$.

Le but du problème est de présenter quelques méthodes de décomposition de nombres rationnels en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Partie A : Exemples

1. Calculer la somme des six « fractions égyptiennes » $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$.

2. Décomposer $\frac{5}{8}$ en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes, dont les dénominateurs sont tous des puissances de 2.

Partie B : Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier

On s'intéresse au cas où la fraction à décomposer a un numérateur égal à 2 et un dénominateur égal au produit de deux nombres entiers naturels impairs p et q.

1. Démontrer la formule $\frac{2}{pq}=\frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}$
2. Justifier que les dénominateurs des fractions précédentes sont des nombres entiers naturels.
3. **En utilisant la formule établie à la question 1**), trouver deux décompositions différentes de $\frac{2}{15}$ en somme de « fractions égyptiennes » différentes.
4. Soit n un nombre entier naturel non nul. Donner une décomposition de la fraction $\frac{2}{2n+1}$ en somme de deux « fractions égyptiennes » différentes.

Partie C « Algorithme glouton » de Fibonacci

En 1201, Léonard de Pise (1175-1250), dit « Fibonacci », prouva que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme d'une somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes et proposa la méthode suivante pour obtenir une telle décomposition :

« Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible qui lui est inférieure, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne 0. »

1. Appliquer cet algorithme à $\frac{13}{81}$ et donner une décomposition de la fraction $\frac{13}{81}$ en somme de trois « fractions égyptiennes » toutes différentes.

2. Dans le papyrus Rhind (1650 av JC), exposé au *British Museum*, figure une des plus anciennes approximations du nombre π égale à $\frac{256}{81}$ (écriture moderne).

   a) Ecrire $\frac{256}{81}$ sous la forme d'une somme d'un entier naturel et d'une fraction comprise entre 0 et 1.

   b) Proposer une écriture de l'approximation de π donnée dans le papyrus Rhind sous forme d'une somme d'un nombre entier naturel et de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Quelques commentaires :

Ce problème compte pour plus de 40% de l'épreuve de mathématiques (5 points sur 12 points au total). Je ne discute pas ici des « fractions égyptiennes » en général, le problème est (malheureusement) conforme aux énoncés des manuels étudiés dans le présent article.

- La partie B concerne une catégorie de fractions du type $\frac{2}{n}$ avec *n* impair.

Aucune référence aux nombreuses tables égyptiennes connues n'est donnée et la démarche mathématiques proposée n'est pas historique. En effet, elle ne semble se retrouver dans aucune source connue (voir, par exemple, le travail de Michel (2014, p. 91-112)). On peut ici reprocher qu'aucune contextualisation historique ne soit faite pour un problème connu et classique : nous sommes devant une « occasion manquée ». En utilisant la formule établie, on arrive à la décomposition :

$$\frac{2}{15} = \frac{2}{3\times5} = \frac{1}{3\times\left(\frac{3+5}{2}\right)} + \frac{1}{5\times\left(\frac{3+5}{2}\right)} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}.$$

Alors que les sources égyptiennes montrent que les scribes égyptiens utilisaient une décomposition différente : $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ (MICHEL, 2014, p. 98 ; IMHAUSEN, 2016, p. 95).

- La partie C :

Le problème demande de décomposer la fraction $\frac{13}{81}$ en somme de trois fractions de numérateur 1 en utilisant l' « algorithme glouton » de Fibonacci.

Dans ce cas précis, Fibonacci utiliserait le cas 2 de son le *Liber Abbaci* (annexe 1). En effet, 81 n'est pas divisible par 13 mais on peut décomposer 13 en somme de termes tous diviseurs de 81, à savoir 13 = 9+3+1. Ainsi,

$$\frac{13}{81} = \frac{9}{81} + \frac{3}{81} + \frac{1}{81}.$$

Et, pour chaque terme, on se ramène aisément au premier cas (annexe 1) : donc

$$\frac{13}{81} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}.$$

C'est bien une décomposition de $\frac{13}{81}$ en somme de trois « fractions égyptiennes » comme le demande l'énoncé.

L'utilisation de l'algorithme glouton de Fibonacci (c'est-à-dire le septième cas, annexe 1) aurait donné – après deux soustractions et l'utilisation du premier cas (annexe 1) – une autre décomposition, à savoir :

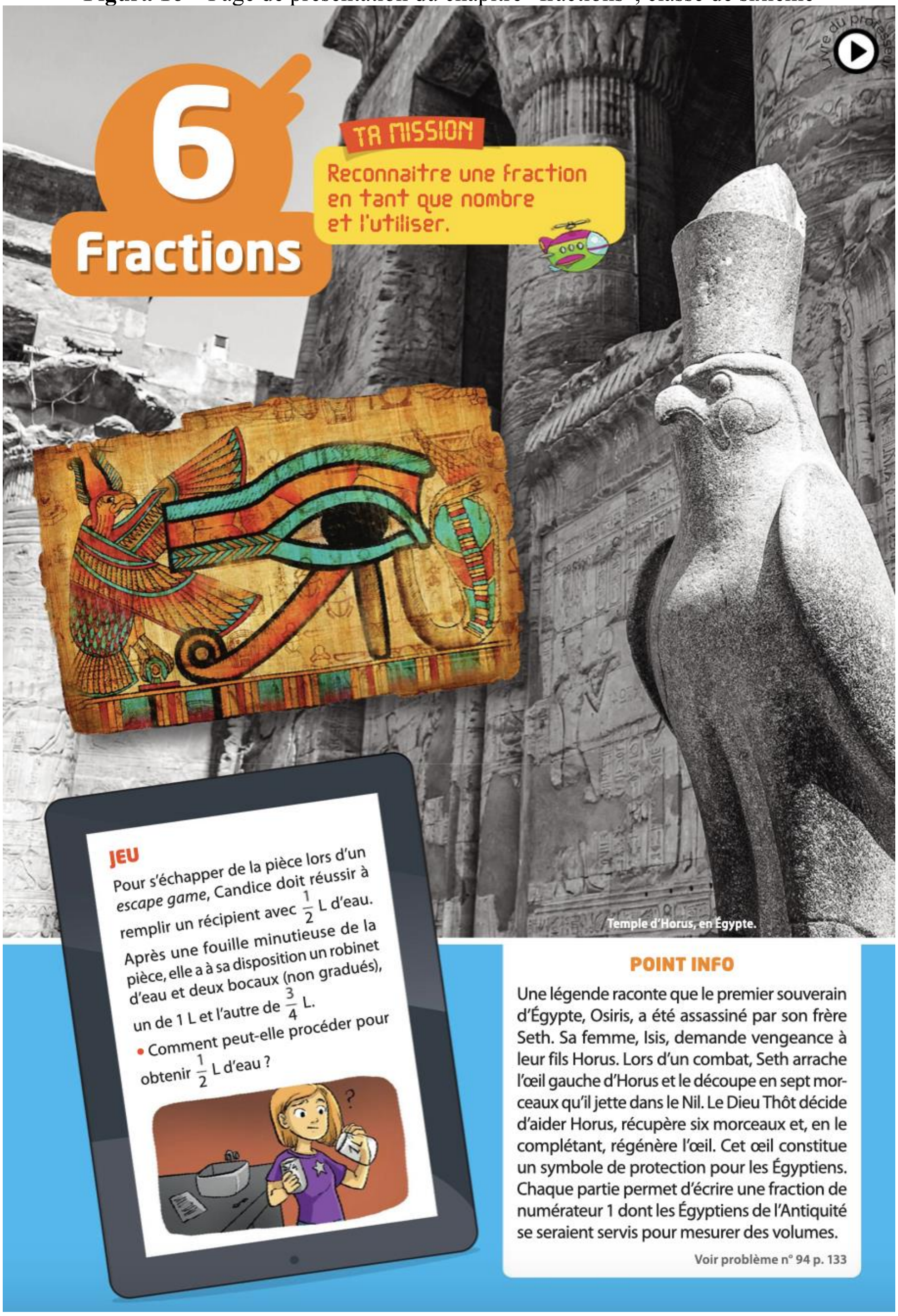
$$\frac{13}{81} = \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{1}{10\,733}.$$

L'algorithme glouton est inutile dans le cas précis et le travail de Fibonacci est bien meilleur car il n'utilise l'algorithme que lorsque la fraction à décomposer ne correspond à aucun des six cas précédents.

Nous sommes bien devant une question ahistorique : la question n'est qu'historiquement déguisée, sans véritable contextualisation historique ; il s'agit au mieux d'un prétexte. Ça annihile l'éventuel rôle de l'épistémologie historique des mathématiques dans l'acquisition de la compétence mathématique. En outre, le sujet cite explicitement Fibonacci (encadr rouge), alors que ce passage n'existe pas dans le *Liber Abbaci* (annexe 1) ni dans aucun autre texte du pisan.

Annexe 3 : Exemples de pages dédiées dans les manuels scolaires : l'œil d'Horus

Figura 16 – Page de présentation du chapitre "fractions", classe de sixième



Fonte: Barnet (2021, p. 117)